3　数学的概念

3.1　数学理論・公理・定理・証明

一つの数学理論というものは，その理論に特有のいくつかの**数学的対象物 (term 項：変数，定数等を指す)** に対して，それら対象物の関係や性質を述べる**数学的叙述 (formula 式)** を積み重ねることでつくられる．

数学理論の背後にある論理体系として，ここでは（等号を含んだ）**一階の述語論理**を用いる．これは以下のように，シンボルのリスト，項の形成規則，式の形成規則，推論規則，公理，からなる形式を持つ．まず，シンボルのリストとは以下のようなものである．

個体変数：x,y,z,x',y',z',$\cdots$（異なる形のシンボルが限りなく用意されているということ.）

個体定数：（集合論から話を始めるときには考えなくて良い．いきなり自然数論を始めたいときなどは，例えば 0 などを固体定数とする.）

論理記号：$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\exists$, $\forall$.（いくつかは，他のもので代用できるがここでは簡単のため，全部つかう.）

関数記号：（集合論から話を始めるときには考えなくて良い．いきなり自然数論を始めたいときなどは，例えば immediate succesor （次の数）を表すための項数 1 の関数記号 s などを導入する．あるいは加法を表す $+$ などを，項数 2 の関数記号として導入しても良い.）

述語記号：$=$（項数 2）.（集合論では，これに加えて項数 2 の述語記号 $\in$ を導入する.）

上の他にも補助的記号として左括弧 (や右括弧) あるいはコンマ記号 , が用いられる．もちろん，それらを使わずに済ます工夫を施すことは可能である．次に，項（数学的対象物を表すことになる）とは，以下の規則で形成される記号の列である．

($T1$) 固体変数，固体定数は，全て項である．

($T2$) f が項数 n の関数記号であり，t_1, $\cdots$, t_n が項とするとき，$f(t_1, \cdots, t_n)$ は項である．

($T3$) 以上によって作られるもののみが項である．

式（論理式：数学的叙述を表すことになる）とは，以下の規則で形成される記号列である．

($F1$) R が項数 n の述語記号であり，t_1, $\cdots$, t_n が項であるとき，$R(t_1, \cdots, t_n)$ は論理式である．

($F2$) A, B を論理式とするとき，$\neg A$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ の形をしたものは，全て論理式である．

($F3$) A を論理式とするとき，$(\forall x)A$, $(\forall y)A$, $\cdots$, あるいは $(\exists x)A$, $(\exists y)A$, $\cdots$ の形をしたものは，全て論理式である．

($F4$) 以上によって作られるもののみが論理式である．

一階の述語論理とは，シンボルのリスト，項形成規則，式形成規則，そしてもとになる論理的公理（あらかじめ決められた論理式）およびそれらをもとに新しい論理式を形成する推論規則（推論に関する公理シェマ）の全体である．そして，ある一つの**数学理論**とは，上の全体にさらに加えて，いちばんもとになる数学的叙述（数学的公理）の全てをつけ足したものである．

一つの数学理論は，しばしば $\mathfrak{L} = (L, R, T)$ のように表現される．L は上記のシンボルのリスト，R は規則（項形成，式形成，推論）のリスト，そして T は公理（論理的，数学的）のリストを表す．

一つの数学理論 $\mathfrak{L} = (L, R, T)$ が与えられたとき，その理論の公理に推論規則を幾度か適用することによって得られるところの新しい数学的叙述を，その数学理論における**定理**という.（いくつかの）公理からその定理に至る道筋（これは数学的叙述の列として表現される図形にほかならない）を指して，その定理の**証明**という．一つの数学理論というものをこのように（並び方に関する規則だけが与えられた純粋に図形的な記号の羅列として）とらえることを指して，理論を「形式化」する，という.「形式化」された理論のことを「形式的」理論と呼ぶ．

以下では $\mathfrak{L} = (L, R, T)$ として，一階の述語論理を背景にしたＺＦ集合論を，全ての議論共通の基盤として用いる．ここでは，その他の様々な数学理論，共通の基盤となる論理的な公理，推論規則等について，詳しく述べる余裕が無い．ＺＦ集合論の公理については 神谷・浦井 (1996) にも簡単に書かれている．一階の述語論理の公理について興味があれば 福山 (1980) が読みやすい．もう少し本格的に理解したい場合，公理的集合論について入門的な知識がすでにあるならば Cohen (1966) を手にとってみるのも良い．公理的集合論からきちんと入門するのであれば Kunen (1980) もしくは Jech (1997)（およびこれらの中で参照されている Mathematical Logic の文献）を読まれることを勧める．完全に数学基礎論寄り（集合論的でない）ではあるが Takeuti (1987) も良く読まれている．数理論理学的なアプローチとしてはむしろ特殊であるが，Bourbaki (1939-) の Set Theory から入門すれば，構造主義の原点ともいうべき知識を身に付けることができる．上記のやや本格的な文献にいたるまでのことをしたくなければ，神谷・浦井 (1996) 第 1 章における議論（背理法および等号理論に関する記述等も含む）が，参考になろう．

3.2　素朴な意味での集合

「集合」（素朴な言い方をすれば，明確な性質によって規定されるものの集まり）は，現代の数学において最も中心的な役割を果たす概念である．実際，ありとあらゆる数学的対象物を「集合」としてとらえるという立場が今日の数学理論の根底にある．ただし「集合」概念を厳密に取り扱うためには，いくぶん面倒な公理系が必要となる（詳しくは 神谷・浦井 (1996) 第 1 章を参照）．

通常，議論の舞台があらかじめ明確に与えられているような場合には，集合論の公理系についてそれほど神経質になる必要はない．集合論の公理系については，それを見て数学理論という我々が手にしている最も明確な理論体系さえもが，つきつめれば一つの思想体系にほかならない，ことの実感を持っていただくことの方が大切である（例えば選択公理）．同時に，数学的に厳密な議論をするとはどういうことか，厳密な証明とはいったい何を指して厳密といわれるのか，その答がすべて集合論の公理系の中にあるのだという事実にも，注意されたい．

それほど厳密な数学を必要としないまでも，集合の濃度という概念に関するある程度の知識は必要不可欠である．二つの集合 A と B の要素の間で，1 対 1 かつ互いにあますところのない対応をつけることができるとき，A と B とは等しい濃度を持つ（等濃である）と言われる．自然数全体の集合 $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$ の濃度を，特に可算濃度と呼ぶ．また N の部分集合と等しい濃度を持つ集合を，一般に可算集合と呼ぶ．可算集合でない無限集合を，一般に非可算集合と呼ぶ．実数全体の集合 R は非可算集合である．

3.3　公理的集合論

詳しくは神谷・浦井 (1996) (神谷・浦井, 1996) 第 1 章を参照せよ．

ZF 集合論 (9 つの公理)

なぜ，公理的集合論が必要か．

「無限」の取り扱い.（直観の通用しない「無限」の世界：ラッセルの逆理）（有界閉でもコンパクトでない例）（経済学でも，世代重複モデルにおける貨幣などが好例）

ZF 集合論は前項に述べた意味で「形式的」理論として記述することが可能である.「集合」概念は，ほとんど全ての数学理論の根底にあり，従ってそれに基づいて「自然数論」「実数論」といったものを「形式化」することもまた可能である.（ただし，実際にそこまで統合的な立場をとることはむしろ稀であり，「形式的」でない「集合」概念に基づいて議論を進めることの方が多い.[17]

3.4 実数

大学以降の数学においては,「実数」という概念もまた公理的に取り扱われる（神谷・浦井 (1996) 第 2 章を参照せよ）．しかしながら，少なくとも教科書レベルの経済学理論を学ぶ段階において，必要とする実数概念が公理的に取り扱われた実数である必要は全くない（すなわち高等学校までの実数概念で十分である）．もっとも，高等学校までの概念での実数というものが，おそらく高等学校まではほとんど意識しなかった次の性質を持っているという認識は必要不可欠である.

（連続性）上に有界な任意の部分集合に対して，その最小上界が存在する.

通常の解析学教科書（大学初年次の）は，上記「連続性」概念を新たに加えた，高等学校までの実数概念の延長線上で書かれている.

しかしながら，少なくとも大学以降の数学をきちんと理解したいと思うのであれば,「高等学校までの実数という概念と，大学以降における実数概念とは完全に異なる」という認識を持つことが重要である．前者は後者の 1 具体例にすぎず，大学以降の実数とは上にのべた連続性という性質（並びにいくつかのかなり自明な性質）を満たす任意の集合を指す公理的概念なのである．詳しくは神谷・浦井 (1996) (神谷・浦井, 1996) 第 2 章（簡単に済ませたければ，２章のイントロダクションだけでも良い）を参照せよ．この立場が明確な解析学教科書としては，杉浦 (1980, 85) が良い．[18]

3.5 ベクトル空間 R^n

実数を n 個（ $n = 1, 2, \cdots,$ ）順序を付けて並べたものの全体を R^n と書く．すなわち，

$$R^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | \, x_1 \in R, \cdots, x_n \in R\}.$$

R^n には，その任意の 2 要素に対する加法，ならびにその要素に対する実数倍という概念が定義される.

R^n には**内積**を用いて**ノルム**および**距離**を定義することができる．距離を用いて，R^n における**収束**，**開集合**，**閉集合**といった概念が定義される.（神谷・浦井 (1996) 第 4 章を参照せよ.）

---

[17]神谷・浦井 (1996) の実数の公理系 (R.1)–(R.5) においては「公理的集合論が背景として」用いられているのであって，決して「それ自体が集合概念まで含めた形の全体世界」を描いているのではない．モデルが（その背景としている公理的集合論の観点から）同型を除いて一意に定まる（即ち (R.1)–(R.5) を満たすものは本質的に唯一つであることが，その集合論の定理として言える）のはそのためである．(R.1)–(R.5) において集合概念は（言うまでもなく）その外で与えられており，その中では形式化されていない．(R.1)–(R.5) の外で，その中で用いている集合概念を，形式化することは全く自由である．その場合，実数に超準モデルが存在するといったことと，ＺＦの中でモデルが同型を除いて一意であるといったことは全く矛盾しない．それは見掛け上のパラドックスでしかない.（cf. Cohen (1966) (Cohen, 1966), p.18.）

実際、(R.1)–(R.5) にＺＦにあるようないくつかの公理を付け加えて、それらが実数という世界全体を規定する公理系であるようにしようと思えば、(R.5) は “有界なその任意の部分集合に対して” のところで自己参照的（その全体世界を対象物として取り扱わなければならない）となり，先に述べた一階の述語論理の体系では形式化できない.（一階の述語論理で完全に形式化できる公理系は，有限モデルの場合以外，同型を除いて一意に定まる —その公理系全体世界の— モデルを持ち得ないことが知られている.（cf. Cohen (1966) (Cohen, 1966), p.17, 系 3.)）

[18]実数を公理系としてでなく，集合論の下で具体的な対象物として一意的に定義してしまう方法もある．その場合，連続性は公理とせず，自然な特徴として導かれることになる．先に述べた公理的集合概念からスタートして，自然数，整数，有理数，実数，を同値類分類で構成していく立場である．Bourbaki の原論シリーズ (Bourbaki, 1939-) をはじめ，公理的集合論の書物（例えば先の Kunen (1980) など）においては，むしろその方が多数である.

● 集合論的記法：$x \in X_i$・無限個の集合の結び，交わり・実数の集合 R
例：各主体の消費集合，生産集合，戦略集合

● ベクトル空間 R^n：線型写像と行列・R^n における収束（距離とノルム）・有界性・凸性
例：価格：m 種の state について（1財もしくは金銭の）配当が与えられた n 種の資産：$x = Ax + C$（Ax は産出量 x に必要な投入量を表すベクトル，C は最終消費ベクトル.）$p = pA' + a_{n+1}w + q$ （pA' は各財1単位産出に必要な他財の価格のベクトル，a_{n+1} は労働投入係数ベクトル，q は利潤ベクトル.）

● 一般位相 (cf. Kelley (1955))：収束とか距離といった概念の一般化

● 関係・対応・関数と連続性：閉集合・開集合と連続関数の定義。
これら概念は非常に重要であるが，経済学的議論の進展に応じて説明を与える.（例：選好関係・効用関数・需要関数・供給関数・超過需要関数）

3.6 線型写像と微分

導値 Derivative とは，つまり「導かれて出て来た線型写像」ということ．U を R^n の開集合とし，関数 $f : U \to R^m$（の値の変化）を点 $a \in R^n$ の近傍において線型関数 $\Lambda : R^n \to R^m$ でもって近似することを考える．つまり a において $f(a)$ なる値は $a+h$ では $f(a+h)$ であるわけだが，その変化分 $f(a+h) - f(a)$ が線型関数 λ でもって λh で近似できているような λ を探そうということである．ここでいう近似を正確に述べると, 任意の $h \to 0 \in R^n$（$h \neq 0$）について，

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \Lambda(h)\|}{\|h\|} = 0 \tag{1}$$

（h が非常に小さければ小さい程，値の方も λ で表現されるものとの違いがどんどんなくなっているという意味.）このような Λ を $Df(a)$，$f'(a)$，$\frac{df}{dx}(a)$ などと書き, f **の点** a **における導値（微分・全微分・derivative）**と呼び，導値が存在するとき f **は** a **で微分可能**という.

f が $a = (a_1, \ldots, a_n)$ で微分可能であるとき，$Df(a)$ の行列表現は（f を R^n から R^m への写像とし，$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ として）

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

ここで $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ は，関数 $f_j(x_1, \ldots, x_n)$ を x_i のみの関数と考えて（x_i 以外の $x_1, \ldots, x_n$ を $a_1, \ldots, a_n$ で固定して）その a_i での導値（f_j **の第** i **変数に関する** a **での偏導値**と呼ばれ，$D_i f_j(a)$ のように書いたりもする）である．正確に言えば，導値（これはあくまで R から R への線型関数）ではなく，それを1つの実数（$y = bx$ と書いた場合の b），即ち**偏微分係数**，で代表させたのが $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$ である．この場合のように，導値とその行列表現（あるいは微分係数）についてはしばしば同一視した言い回し，記述がなされる．[19]

f がある開集合 $U \subset R^n$ の全体で微分可能であるとき，

$$Df : U \ni a \mapsto Df(a) \in L(R^n, R^m) \tag{2}$$

もまた関数と見ることができる.（ここで $L(R^n, R^m)$ は R^n から R^m への線型関数全体からなる集合を表す.）これを f **の導関数（derivative）**と呼ぶ.

[19]言葉の上でも，きちんと使い分けている人は理論家においてすらほとんどいない.

（余談）上記 $L(R^n, R^m)$ には，適当にノルムを入れて位相ベクトル空間と見なすことができる．その場合，式 (1) での近似の考え方をもう一度 Df に適用して，Df のさらなる導関数をもとめるということが考えられる．このような導関数，すなわち $DDf : U \ni a \mapsto DDf(a) \in L(R^n, L(R^n, R^m))$ が存在するとき，これを $D^2 f$ と書いて f の２階導関数と呼ぶ．また $L(R^n, L(R^n, R^m))$ は簡単な方法により $L^2(R^n, R^m)$（R^n から R^m への複線型関数全体からなる集合）と同一視される．一般に，f の $a \in U$ における k 階導値 $D^k f(a)$，および f の k 階導関数

$$D^k f : U \ni a \mapsto D^k f(a) \in L^k(R^n, R^m)$$

が同様に定義される．

● $U \ni x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ として，第 i 変数に関する偏導値 $D_i^k f(a)$・偏導関数 $D_i^k f$ と上記の微分の関係.

● 一意性・連続性・連鎖律

Theorem 3.1（連鎖律）R^n の開集合 U から R^m への関数 g と，R^m の開集合 V から R^ℓ への関数 f を考える．今，$f \circ g$ が U 上で定義されており，g が $a \in U$ で微分可能，f が $b = g(a) \in V$ で微分可能とする．このとき $\varphi = f \circ g$ も a で微分可能であり，

$$D\varphi(a) = D(f \circ g)(a) = Df(b) \circ Dg(a)$$

（右辺は行列演算で言えば $\ell \times m$ 行列と $m \times n$ 行列の積の形）となる．

Corollary 3.2（合成関数微分法）$g_1, \cdots, g_m$ を R^n の開集合 U 上で定義された C^1 級実数値関数とし，f を R^m の開集合 V 上で定義された，各点で微分可能な関数とする．今 U 上で実数値関数 φ が，$\varphi(a) = f(g_1(a), \cdots, g_m(a))$ という合成関数として定義されているものとする．このとき φ も微分可能であり，その $a \in U$ での第 i 座標に関する偏導値は（$b = (g_1(a), \cdots, g_m(a)) \in V$ として）

$$D_i\varphi(a) = \sum_{j=1}^{m} D_j f(b) D_i g_j(a)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) \right)$$

となる．

Theorem 3.3（平均値の定理:n 変数 R 値）U を R^n の開集合とし，$f : U \to \boldsymbol{R}$ を U の各点で微分可能とする．$a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$, $b = (b_1, \cdots, b_n) \in U$ を任意にとるとき，それに対してある $c = (1-\alpha)a + \alpha b, 0 \le \alpha \le 1$, が存在して，

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} D_i(c)(b_i - a_i) \tag{3}$$

となる．特に $\sup\{D_i(c) | i = 1, \ldots, n, c \in [a, b]\} < \infty$ なら

$$|f(b) - f(a)| \le n \sup\{D_i(c) | i = 1, \ldots, n, c \in [a, b]\} \|b - a\| \tag{4}$$

のように，定義域でのノルムの定数倍で値の変化の大きさを抑えることができる．

●推薦書籍：神谷・浦井 (1996), 杉浦 (1980, 85), Spivak (1965), Dieudonné (1960).

4　技術と生産

ここでは生産主体の行動を静学的に論ずる．経済学理論における生産主体の特徴は，何よりもまずそれが単なる技術・テクノロジーであるということ，そしてそのテクノロジーはその所有者（消費もおこなう消費主体の中に存在する）の利益，思惑とは「全く独立」に行動を決定するということである．すなわち，単一の消費主体が同時にとあるテクノロジーの単一の所有者であるような状況（これは先にも述べた通り，個人における資本財の所有といったことを表現する場合のごく普通の状況であるが）において，その主体は消費主体としての行動決定と，生産主体としての行動決定を，完全に独立に（いわば２つの頭と心を持って）行うということである．

このような考え方は経済学理論の成立においてきわめて重要である．例えばケインズ理論などにおいても長期期待に基づく消費や投資に関わる行動決定と短期の視点による主としてその期の製造に関わるような行動決定が，別々に専念する主体によってなされること (Keynes, 1936; Chapter 5, p.46) がその一般理論の出発点にある．このような想定を一歩離れると，独占・寡占の問題をはじめ，所有と経営の分離，企業の目的論といった，経済状態の最適性に関わる命題のみならず均衡の存在（すなわち理論そのものの成立）に関わる厄介な問題を孕んで来ることとなる．もちろんそれは現実世界と経済学理論の狭間であり，経済学理論の境界そのものでもあるわけだが，ともかくそれは個々人がその行動決定において，本当にどこまでも考え抜くといった場合には悩まされるであろう（今日でも記述不可能な）種々の問題を排除してくれるのである．[20]

消費主体の前に生産主体の説明をすることにさしたる理由はない．必要となってくる数学的内容については，どちらかと言えば生産主体の理論の方が簡単ではある．

4.1　静学理論における生産主体

Hicks (1939) によれば，静学理論とは経済学理論のうち時間が本質的な意味を持たない部分を指す．先の 2.4 節で定義された厳密な意味での market という言葉を用いて表現すれば，これはすなわち“単一の market における交換”という概念によって記述される部分と言ってよい．

単一の market のみで行動を決定する（そのあとに来る market の事は考えない）生産主体の行動を記述することは，非常に簡単である．なぜならその生産主体の生産行動は全て，その単一の market において取り引きされる商品によって記述され，そしてそれらの価格は全て所与であるから，その生産主体の（現在直面している market での）行動に対して明確な価値，

産出物の価値 − 投入物の価値

が定まるからである．各生産主体の行動は，可能な行動計画の中から，この「行動の価値」を最も大きくするようなものとして決定される．

これに対して，複数の market にまたがって行動を決定する（すなわち投入物と産出物とが必ずしも同一の market で扱われていない）動学的な生産主体の行動を記述する場合には，静学的な場合に比べて（根は同一であるのだが表面上は異なって見える）少なくとも 2 つの問題が生じる．

(1) 単一の market においては明示されてない価格が存在するため，企業行動の価値が明確に定まらない．（とりわけ state 間での価値の比をどう定めるかという問題.）

(2) 生産主体は資金調達（同時に利潤の分配）の問題に直面している.（特にそれが各主体の生産，消費決定という実体的な経済に影響を与えるとすれば，問題が複雑になる.）[21]

[20]そしてそれが，経済学者によっては「経済学理論の考えているように現実の人々が行動しなければならない」というような極論まで飛び出す理由でもある．

[21]特に，生産計画（生産行為）そのものが先物取り引きの可能性を通じて市場構造そのものを変更してしまったり，お金の借りやすさに直接関わってくるところが，消費主体の場合より問題を複雑にしている：もちろん現実世界で消費主体にもそのような側面（例えば医者

前者は各生産主体が何等かの「価格予想」に基づくことを意味し，予想はしばしば外生化される．後者は owner への利潤の分配とそのタイミングということまで含めて，いかなる方法で各 market において資金を調達するかという問題である．いずれも満足のいく形で内生的に扱われたことは無いが，例えば完備市場における完全予見の均衡（後述：一つの予想の内生化・ある意味での合理的期待）にのみ注目し，資金調達方法として社債と内部留保のみを考慮するような単純ケースであれば (1), (2) は問題とならない．この意味で，生産主体のファイナンス（資金調達）の方法が実体的な経済（消費・生産決定）と独立な問題として取り扱い得る (MM-命題の成立) ことと，将来の可能な状態の全てにわたって state 間での相対的な商品の価値の比率が明確に定まっていること (state price の存在)，そして「静学的な理論をそのまま動学的な問題にあてはめることが許されるための条件」は，密接に関連する同一根の問題とも言える．この観点から，実質的な意味での静学的な生産主体の理論とは，生産主体の行動を含む議論において特に (1), (2) を考慮せずになされる部分と言うべきであろう．

4.2　生産主体の行動：生産集合に基づく一般的な議論

4.2.1　生産集合と利潤最大化問題

我々は生産主体（以下 j と呼ぶ）にとって可能な生産行動の全体を，商品空間 R^ℓ のある部分集合 Y_j というもので表現する．Y_j を主体 j の生産集合 と呼ぶ.（もちろん一つの生産行動が R^ℓ の一点として表現されている.）このとき価格ベクトル $p \in R^\ell$ を所与とする生産主体の行動は，次のようにまとめられる．

（生産主体の利潤最大化問題）$p = (p_1, p_2, \cdots, p_\ell) \in R^\ell$ を所与として，生産行動 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_\ell) \in R^\ell$ の価値

$$v(p, y) = p \cdot y = \sum_{k=1}^{\ell} p_k y_k$$

を最大にするような $y \in Y_j$ を選択する．

すなわち，静学的理論における生産主体の行動は上のような数学的問題の解についての考察に尽きることになる．我々はこの考察を，次の三つの基本的な問いに答える形で進めていく．

(i) 最大化問題の解が存在するための条件は何か．

(ii) 最大化問題の解が存在するとしたとき，最大化問題のパラメター, p, の変化にともなって，実現できる最大値がどのように変化するか．

(iii) 最大化問題の解が存在するとしたとき，最大化問題のパラメター, p, の変化にともなって，最大化の解（の集合）がどのように変化するか．

(i) は言うまでもなく，生産主体の行動について語る場合の大前提となる条件である．(ii) は利潤関数についての議論であり，(iii) は個別生産主体の供給関数（供給対応）についての議論である．

生産主体の最大化問題，ならびにそれにまつわる基本的問題 (i),(ii),(iii) を取り扱いながら, 実際のモデルにおいて我々は Y_j に対する様々な仮定を置くことになるであろう．例を挙げれば，

(1) Y_j は閉集合である

(2) Y_j は 0 を要素として持つ

としての労働サービスを提供している場合の方が，経済学者としての労働サービスを提供している場合よりもお金を借りやすいといったようなこと）が無いとは言えないのであるが，それは新規の生産プロジェクトに対する資金調達（「投資」や「資本蓄積」）という概念と直結する生産主体の場合と比べれば瑣末な問題，労働を中心とする消費主体の初期保有への先物取り引きという（先のこととは言え，予め総量が制限された問題）という意味しか持たない．生産主体の場合そうしたプロジェクトには量的にも価値的にも上限など無いと考えるのが適切であるから，資金調達の問題は消費者の場合よりも厄介で複雑な問題となる．

(3) $Y_j \cap R^\ell_+$ は上に有界である

(4) Y_j は $-R^\ell_+$ を部分集合として含む

(5) Y_j は convex である

(6) Y_j は convex cone である

(7) Y_j は有界集合である

などである．(c.f. Debreu (1959), Chapter 3.) もちろん議論によっては上に挙げたいずれの仮定よりももっと弱い仮定の下で論じられることもあるし，より強い仮定が必要な場合もある．

● 規模に関する収穫逓増（逓減・不変）

生産集合に基づく $y = (y_1, \ldots, y_\ell) \in Y_j$ のような技術と生産の表現は，最初の章でも述べたように個人の保有する様々な商品の変形可能性（たとえば，今手元にあるサンドイッチをランチボックスに入れて大学に持っていって食べるとか，大学生協で CD を買った方が家の近所の CD 屋さんで買うより安いからそうしたとか，カップラーメンを夜食にとっておいたとか，そういうことまで）を含めた一般的な記述方法である．こういった記述は「人」と「物」との関係の何たるかについて一つの哲学的な基礎を与えるものであり，その意義はどちらかと言えばより規範的な方向に向けてあるものと言うべきであろう．

ここでの後半でなされている微分可能な生産関数を用いた議論や，マクロ経済学での新古典派生産関数などは，我々が通常持っている（世俗的な意味での）生産概念に合わせたものであり，そこでは企業によって生産があらかじめ決められた種類の投入物と産出物のあいだで最も（数量の上で）効率的に行われているような場合が前提とされている．

● 一次同次生産関数

ただし本章の最初 c にも述べた通り，生産集合の場合であれ生産関数の場合であれ，我々はその技術が誰の所有するものであるかという問題とは「独立に」，その技術がいかに用いられるべきかという問題を論じ得るのだとしているところに注意されたい．今日の経済学理論はまぎれもなくそれを前提に成り立っているのである．

4.2.2　予備的知識：連続関数およびコンパクト集合

実数列 $\{x^\nu\}_{\nu \in N}$ およびその（R 内における）収束 $x^\nu \to x^*$ という概念を前提として以下議論を進める．（必要であれば 神谷・浦井 (1996) を見よ．）R^n の点の列（**点列**という）$\{x^\nu\}_{\nu \in N}$（ここで x^ν はベクトルであって $x^\nu = (x^\nu_1, \ldots, x^\nu_\ell)$ のような形であるとする）が R^n **内で点** $x^* = (x^*_1, \ldots, x^*_n)$ **に収束する**とは，数ベクトルの全ての要素 $i = 1, 2, \ldots, n$ について $x^\nu_i \to x^*_i$（R での収束という意味）が成り立つこととする．まず最初に，R^n の部分集合 X から R^m の部分集合 Y への関数 f が**連続 (continuous)** であるということの定義を与える．

Definition 4.1 : $f : X \to Y$ が点 $x^* \in X$ で連続であるとは，x^* に収束する X 内の任意の点列 $\{x^n\}^\infty_{n=1}$ について，Y 内の点列 $\{f(x^n)\}^\infty_{n=1}$ が $y^* = f(x^*)$ に収束することをいう．f が X の全ての点で連続であるとき，単に f は連続であると言われる．

R^n の部分集合 A は，A 内の点列の R^n での収束先がすべて A に入るとき，R^n における**閉部分集合**と言われる．閉部分集合の補集合は**開部分集合**である．また R^n に大小関係 $\leq$ を，$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, i = 1, 2, \ldots, n$

（全ての座標 $i = 1, 2, \ldots, n$ について R の意味で $\leq$ ということ）によって定義する．このとき R^n の部分集合 A は，R^n の適当な要素 b, c を用いて全ての $a \in A$ に対して $b \leq a \leq c$ とできるとき，**有界**であると言われる．有界であり，閉であるような R^n の部分集合を，R^n の**コンパクト部分集合**と呼ぶ．コンパクト部分集合は，連続関数の概念と共に，特に最大化問題を扱う上で非常に重要な役割を果たす．次の定理は非常に基本的である．

Theorem 4.2 （最大値最小値の定理）X をコンパクト集合とし，$f : X \to \boldsymbol{R}$ を連続関数とする．このとき，X の点 x^* および x_* が存在して，f は x^* で最大値を，x_* で最小値をとる．

証明は神谷・浦井 (神谷・浦井, 1996)，あるいは標準的な解析学の入門書（例えば杉浦 (杉浦, 1980, 85) 等）を見よ．

4.2.3　利潤関数

以下では生産集合 Y_j を持つ生産主体 j の行動を記述する．前節に述べた生産主体の最大化問題（以下 PMP — Profit Maximization Problem — と呼ぶ）

> （PMP）$p = (p_1, p_2, \cdots, p_\ell) \in R^\ell$ を所与として，生産行動 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_\ell) \in R^\ell$ の価値
>
> $$v(p, y) = p \cdot y = \sum_{k=1}^{\ell} p_k y_k$$
>
> を最大にするような $y \in Y_j$ を選択する．

には，その解が存在するとは限らない．(PMP) 問題に少なくとも一つの解が存在するような $p \in R^\ell$ の範囲を Δ で表すことにすれば，我々は Δ を定義域とする次のような関数を考えることができる．

Definition 4.3 :（利潤関数）Δ 上で定義され，値を $\boldsymbol{R}$ に持つ関数 π_j を

$$\pi_j : p \mapsto \max_{y \in Y_j} p \cdot y$$

と定義するとき，π_j を生産主体 j の**利潤関数** (profit function) と呼ぶ．

定義から明らかなように，p が Δ の要素であれば，任意の $\alpha \in R_+$ について αp もまた Δ の要素となる．そして利潤関数は，明らかに $\forall \alpha \in R, \forall p \in \Delta, \pi_j(\alpha p) = \alpha \pi_j(p)$ を満たす（利潤関数の一次同次性）．さらに，Δ が，p, p' および $\alpha p + (1-\alpha)p', (0 \leq \alpha \leq 1)$, という 3 つの点を要素としているとき，$\pi_j(q) \leq \alpha \pi_j(p) + (1-\alpha)\pi_j(p')$ が成り立つ．すなわち，Δ が凸集合のとき，$\pi_j : \Delta \to R$ は凸関数となる．(これらは各自で確かめよ.)

Theorem 4.4　利潤関数 $\pi_j : \Delta \to R$ について，以下のことが成り立つ．

(i) $\forall p \in \Delta$, $\forall \alpha \in R_+$, $\alpha p \in \Delta$ and $\pi_j(\alpha p) = \alpha \pi_j(p)$.

(ii) $\forall p \in \Delta$, $\forall p' \in \Delta$, $\forall \alpha \in R$, if $\alpha p + (1-\alpha)p'$ is an element of Δ, then $\pi_j(\alpha p + (1-\alpha)p') \leq \alpha \pi_j(p) + (1-\alpha)\pi_j(p')$.

$p^* \in \Delta$ と $\pi_j(p^*) = q^* \cdot y^*$ を満たす y^* （すなわち p^* の下での最大利潤を実現するような y^*）を用いて $R^\ell \times R$ における集合 $H = \{(p, p\cdot y^*) \in R^\ell \times R | \, p\cdot y^* = \pi_j(p^*)\}$ を考えると，H は点 $(p^*, \pi_j(p^*))$ において π_j のグラフを下から支える平面になる．(なぜなら点 $p = p^*$ において，$p \cdot y^*$ のグラフは $\pi_j(p)$ のグラフと交わっており，それ以外の p では少なくとも $\pi_j(p)$ がその定義によって $p \cdot y^*$ 以上のはずだからである.）したがって，もしも関数 $\pi_j(p_1, \cdots, p_\ell)$ が点 $p^* \in \Delta$ において変数 p_k についての偏導値を持つならば，必ず $\frac{\partial \pi_j}{\partial p_k}(p^*) = y_k^*$ が成り立つ（ Hotelling's Lemma の図形的証明）.

Theorem 4.5　利潤関数 $\pi_j : \Delta \ni p = (p_1, \cdots, p_\ell) \mapsto \pi_j(p) \in R$ が点 $p = p^*$ において変数 p^k に関する偏導値を持つとする．また $y^* = (y_1^*, \cdots, y_\ell^*) \in Y_j$ を p^* の下での最大利潤を実現するような生産行動であるとする．このとき，

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial p_k}(p^*) = y_k^*$$

が成り立つ.

簡単のため，以下しばらく Y_j を R^ℓ の非空な有界閉集合としよう．[22] このとき利潤関数の定義域としてとることのできる範囲 Δ は先の定理 4.2 より R^ℓ 全域となり，利潤関数の定義域に関する面倒な記述が不要となる．特にこのとき，次の定理にみるように利潤関数が Δ 上連続であることを示すことができる.

Theorem 4.6 :　Y_j が $\boldsymbol{R}^\ell$ の有界な閉部分集合であるとする．このとき $p \in \boldsymbol{R}^\ell$ に対して $\max_{y \in Y_j} p \cdot y$ を与える利潤関数 $\pi_j : \boldsymbol{R}^\ell \to \boldsymbol{R}$ は連続関数である.

Proof: $\{p^n\}_{n=1}^\infty$ を $\boldsymbol{R}^\ell$ 内の点列とし，$p^* \in \boldsymbol{R}^\ell$ をその収束先とする.（証明すべき内容は，数列 $\{\pi_j(p^n)\}_{n=1}^\infty$ が $\pi_j(p^*)$ に収束することである.）結論を否定すると，ある正の実数 $\epsilon > 0$ が存在して，無限に多くの番号 $n_1, n_2, \cdots$ について，

$$|\pi_j(p^{n_i}) - \pi_j(p^*)| > \epsilon \tag{5}$$

となるようにすることができる．さて，利潤関数の定義から，各 $i = 1, 2, \cdots$ について $y^{n_i} \in Y_j$ を

$$\pi_j(p^{n_i}) = p^{n_i} \cdot y^{n_i} \tag{6}$$

なるようにとることができる．Y_j が有界かつ閉であることから，点列 $\{y^{n_i}\}_{i=1}^\infty$ はある点 $y^* \in Y_j$ に収束する部分列 $\{y^{m_i}\}_{i=1}^\infty$ を持つ．この部分列に関して，式 6 の極限をとれば，

$$\lim_{i\to\infty} \pi_j(p^{m_i}) = p^* \cdot y^* \tag{7}$$

を得る．一方，π_j の定義から $\pi_j(p^*) \geq p^* \cdot y^*$ であるが，もしも $\pi_j(p^*) > p^* \cdot y^*$ であるならば，ある $\delta > 0$ および $y' \in Y_j$ が存在して，$p^* \cdot y' > p^* \cdot y^* + \delta$ とならねばならない．このとき $\{p^{m_i}\}_{i=1}^\infty$ が p^* に, そして $\{y^{m_i}\}_{i=1}^\infty$ が y^* にそれぞれ収束することから，十分大きな番号 $\bar{i}$ が存在して，全ての $i \geq \bar{i}$ について

$$p^{m_i} \cdot y' > p^{m_i} \cdot y^{m_i} + \delta \tag{8}$$

となる．これは $y' \in Y_j$ だから y^{m_i} の定義（最大利潤を実現している）に反する．よって

$$\pi_j(p^*) = p^* \cdot y^* \tag{9}$$

[22] 言うまでもなく個別生産主体の生産集合 Y_j を有界な集合と仮定することは制限的である．しかしながらいくつかの経済理論においては，実際には有界でない生産集合を仮に有界な集合に置き換えて議論を行っても，理論上一般性を失わない事がある．例えば，ある商品に関して技術的にいくらでも多くの量を生産することが可能であるとしても，世界に存在するその商品の原料に限りがあるならば，均衡において実現される生産量には上限が存在する．そういった上限を用いて生産集合を技巧的に有界な集合に置き換えたときの最大化問題と，真実の最大化問題との間で解が異なることはもちろん有り得るとしても，それが均衡から離れたところの問題でしかないとすれば，少なくとも均衡の近傍での話をしている限り，最大化問題をいずれのものと解釈しても議論上の一般性を失わないという事がある．一般均衡の存在議論 (Nikaido (1956), Debreu (1959), etc.) は，そのような手続きが正当化される代表例である.

でなくてはならない．上式および式 (7) より，

$$\lim_{i\to\infty} \pi_j(p^{m_i}) = \pi_j(p^*) \tag{10}$$

である．ところが $\{p^{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ は $\{p^{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ の部分列であるから，これは式 (5) に矛盾する． *Q.E.D.*

4.2.4　費用関数

引き続き Y_j という生産集合を持つ主体 j の行動を記述する．生産主体の最大化問題（PMP）において，いずれかの財の産出量あるいは投入量を固定した問題を考えることができる．特に，ある財の産出量があらかじめ決められているとき，(PMP) 問題は決められた産出量を実現するための最小費用をもとめる問題（以下 CMP 問題 — Cost Minimization Problem — と呼ぶ）として見ることができる.（とりあえず財 1 の数量を固定するとしよう.）

（CMP）$y_1 = \bar{y}_1$ と $p = (p_1, p_2, \cdots, p_\ell) \in R^\ell$ を所与として，生産行動 $y = (\bar{y}_1, y_2, \cdots, y_\ell) \in R^\ell$ の価値 $v(p, y) = p \cdot y = \sum_{k=1}^{\ell} p_k y_k$ を最大にするような，言い換えると

$$\sum_{k=2}^{\ell} p_k(-y_k)$$

を最小にするような $(\bar{y}_1, y_2, \cdots, y_\ell) \in Y_j$ を選択する．

費用最小化問題は固定した産出量（上でいうと $\bar{y}_1$）および投入量（固定されるものを考慮するならばの話）に依存している．産出量，投入量を固定する財の種類は複数であっても構わないが，以下では表記の簡略化のため，固定するのは財 1 のみとする.（量を固定する財の種類が複数に及ぶ場合の定式化は各自で考えよ.）(CMP) は（PMP）と同様に，やはりその解が存在するとは限らない．(CMP) 問題に少なくとも一つの解が存在するような $p \in R^\ell$ の範囲（もちろん $\bar{y}_1$ に依存する）を Δ で表すことにすれば，我々は Δ を定義域とする費用関数という概念を得る．

Definition 4.7 :（費用関数）Δ 上で定義され，値を $\boldsymbol{R}$ に持つ関数 c_j を

$$c_j : p \mapsto \min_{y \in Y_j \, y_1 = \bar{y}_1} \sum_{k=2}^{\ell} p_k(-y_k)$$

と定義するとき，c_j を生産主体 j の産出量 $y_1 = \bar{y}_1$ を固定したときの **(価格についての) 費用関数**と呼ぶ．c_j は $\bar{y}_1$ に依存するので，とくにこれも変数と考えて，

$$C_j(y_1, p) = c_j(p) \quad (\ c_j \text{ は産出量を } y_1 \text{ に固定した上記の費用関数})$$

と書くとき，C_j を，生産主体 j の**費用関数** (cost function) と呼ぶ.（c_j は単に C_j の第一変数を固定したものである.）また，非常にしばしば $C_j(y_1, p)$ の第二変数 p を固定したもの

$$C_j^p(y_1) = C_j(y_1, p)$$

もまた **(価格を固定したとき産出量についての) 費用関数**と呼ばれる．経済学の入門テキストなどで総費用関数と呼ばれるのはこれである．

産出量 $\bar{y}_1$ を固定した費用関数 c_j は，明らかに $\forall \alpha \in R, \forall p \in \Delta, c_j(\alpha p) = \alpha c_j(p)$ を満たす.（費用関数は p に関して一次同次である.）さらに，Δ が，p, p' および $q = \alpha p + (1-\alpha)p'$, $(0 \leq \alpha \leq 1)$, という 3 つの点を要素としているとき，$c_j(q) \geq \alpha c_j(p) + (1-\alpha)c_j(p')$ が成り立つ．すなわち，Δ が凸集合のとき，$c_j : \Delta \to R$ は凹関数となる.（各自で確かめよ.）

THEOREM 4.8 産出量 $y_1 = \bar{y}_1$ を固定した費用関数 $c_j : \Delta \to R$ について，以下のことが成り立つ．

(i) $\forall p \in \Delta$, $\forall \alpha \in R_+$, $\alpha p \in \Delta$ and $c_j(\alpha p) = \alpha c_j(p)$.

(ii) $\forall p \in \Delta$, $\forall p' \in \Delta$, $\forall \alpha \in R$, if $\alpha p + (1-\alpha)p'$ is an element of Δ, then $c_j(\alpha p + (1-\alpha)p') \geq \alpha c_j(p) + (1-\alpha)c_j(p')$.

産出量 $\bar{y}_1$ を固定した費用関数 c_j に対して，$p^* \in \Delta$ と $c_j(p^*) = \sum_{k=2}^{\ell} q_k(-y_k^*)$ をみたす $(\bar{y}_1, y_2^*, \cdots, y_\ell^*) \in Y_j$（すなわち $\bar{y}_1$ を産出するにあたって p^* の下で最小化された費用を実現するような $y_2^*, \cdots, y_\ell^*$）を用いて $R^\ell \times R$ における部分集合 $H = \{(p_1, p_2, \cdots, p_\ell, \sum_{k=2}^{\ell} p_k \cdot (-y_k^*)) \in R^\ell \times R | \sum_{k=2}^{\ell} p_k(-y_k^*) = c_j(p^*)\}$ を考えると，H は $(p^*, c_j(p^*))$ において c_j のグラフを上から支える平面になる.（なぜなら，点 $p = p^*$ において，$p \cdot y^*$ のグラフは $c_j(p)$ のグラフと交点を持ち，それ以外の p については少なくとも $c_j(p)$ の大きさが，費用関数のその定義によって $\sum_{k=2}^{\ell} p_k(-y_k^*)$ 以下になるはずだからである.）したがって，もしも関数 $c_j(p_1, \cdots, p_\ell)$ が点 p^* において変数 p_k, $k = 2, \cdots, \ell$ についての偏導値を持つとすれば，$\frac{\partial c_j}{\partial p_k}(p^*) = -y_k^*$, $k = 2, \cdots, \ell$ が成り立つ（Shephard's Lemma の図形的証明）.

THEOREM 4.9 産出量 $y_1 = \bar{y}_1$ を固定した費用関数 $c_j : \Delta \ni p = (p_1, \cdots, p_\ell) \mapsto c_j(p) \in R$ が点 $p = p^*$ において変数 p^k に関する偏導値を持つとする．また $(\bar{y}_1, y_2^*, \cdots, y_\ell^*) \in Y_j$ を p^* の下での最小費用を実現するような生産行動であるとする．このとき $k = 2, \cdots, \ell$ について，

$$\frac{\partial c_j}{\partial p_k}(p^*) = -y_k^*$$

が成り立つ．

産出量を $y_1 = \bar{y}_1$ に固定した費用関数 c_j の連続性は，利潤関数の連続性の問題に帰着させることが可能である．なぜなら，Y_j の部分集合 $\bar{Y}_j = \{(y_1, \cdots, y_\ell) \in Y_j | y_1 = \bar{y}_1\}$ をあたかも生産集合とみなしたときの利潤関数を π_j とすれば，$c_j(p) = -(\pi_j(p) - p_1\bar{y}_1)$ と表すことができるからである.（各自確認せよ.）Y_j がコンパクト集合であれば，上のような $\bar{Y}_j$ もまたコンパクト集合である（証明は練習問題とする）から，利潤関数の連続性に関する先の定理を用いれば次の定理が成り立つ．

THEOREM 4.10 Y_j が $\boldsymbol{R}^\ell$ の有界な閉部分集合であるとする．このとき産出量 $y_1 = \bar{y}_1$ を固定した費用関数 $c_j : \boldsymbol{R}^\ell \to R$ は連続関数である．

● 短期・長期の費用関数

上では一つの産出量 y_1 を固定したが，残る投入物（もしくは産出物かも知れないが）についてはその数量を（最小化問題の中で）自由に変更できるものと考えた．このように産出物，投入物の量を自由に変更できることが長期において可能なことであって短期的には不可能であるという場合，つまり短期的には y_1 の他の財，例えば y_2 においてその量を固定されたものと考えなければならないようなとき，上記の費用関数概念 c_j, C_j, C_j^p それぞれ（それらは長期のものと考えられる）に対して y_2 を固定と考えた**短期費用関数**を考えることができる．

※ 包絡線定理 Envelope Theorem : $f(x,a)$ を最大化するとき， a を所与としたときの f の最大化を実現する x を $x(a)$ で表し，$\phi(a) = f(x(a),a)$ と置く．このとき $D_a\phi(a) = D_xf(x(a),a)D_ax(a) + D_af(x(a),a)$ なのだけれど，x の定義から $D_a\phi(a) = D_af(x(a),a)$ だという話.（Hotelling's Lemma の図的証明と同じ論理で示すことができる.）

4.2.5　予備的知識：対応および対応の連続性

X および Y を集合とする．X の要素 x に対して，Y の部分集合 $F(x) \subset Y$ を定める関数 $F : X \to \mathfrak{P}(Y)$ のことを，集合 X から Y への**対応 (correspondence)** とも呼ぶ．以下では対応 F を，しばしば $F : X \ni x \mapsto F(x) \subset Y$ と表したり，X を**対応 F の定義域**と呼んだり，$\bigcup_{x\in X} F(x) \subset Y$ を**対応 F の値域**と呼んだり，Y を対応 F の写り先と呼んだりする．

Definition 4.11 **(上半連続対応)** $(X, \mathfrak{T}_X)$ および $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ を位相空間とする．X から Y への対応 F が**点 $x \in X$ において上半連続**であるとは，$F(x)$ を含む Y における任意の開集合 U に対して，x を要素として持つ X 開集合 V が存在して，$\forall x' \in V$, $F(x') \subset U$ とできることをいう．F が X の全ての点において上半連続であるとき，単に F は**上半連続**であると言う．

Theorem 4.12 **(上半連続性と閉グラフ性)** (X, d_X) を距離空間，(Y, d_Y) をコンパクト距離空間とし，F を X から Y への対応とする．このとき以下の二つの条件は，同値である．

(i) F のグラフは $X \times Y$ の（積位相での）閉部分集合である．

(ii) F は閉値，上半連続対応である．

(証明) (i) $\Longrightarrow$ (ii).
F のグラフが閉集合であるとき，任意の $x \in X$ について $F(x) \subset Y$ が閉集合であること（閉値）は自明である．以下上半連続性を示す．$\bar{x} \in X$ と $F(\bar{x})$ を含む Y の部分集合 U とを任意にとって固定する．さらに $\bar{x}$ の $\frac{1}{n}$ 開近傍 $B_{\frac{1}{n}}(\bar{x}), n = 1, 2, \cdots,$ をとる．もしも十分大きな n について，$\forall x \in B_{\frac{1}{n}}(\bar{x})$, $F(x) \subset U$ が言えておれば証明は終わっている．そこで，この結論を否定し，矛盾が導かれることを示す．すなわち，n をいくら大きくとっても，$\exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(\bar{x})$, $F(x_n) \setminus U \neq \emptyset$ とする．各 n について $y_n \in F(x_n) \setminus U$ をとる（選択公理）と，(x_n, y_n) は F のグラフ上の点である．$Y \setminus U$ はコンパクト集合であるから，$\{y_n\}_{n\in N}$ は Y において，ある $\bar{y}$ に収束する部分列 $\{y_n\}_{n\in N'}$ を持つ．このとき，$(x_n, y_n)_{n\in N'}$ は F のグラフ上の点列であって，$(\bar{x}, \bar{y})$ という F のグラフ外の点に収束する．これは F のグラフが閉集合であることに反する．
(ii) $\Longrightarrow$ (i).
F のグラフを $G_f \subset X \times Y$ で表す．(x_n, y_n) を G_f 上の点列とし，$X \times Y$ において (x_*, y_*) に収束しているものとする．示すべきことは，$(x_*, y_*) \in G_f$ である．結論を否定すると，$y_* \in Y \setminus F(x_*)$ である．F が閉値であるから，y_* と $F(x_*)$ を分離する Y の二つの開集合 $U_1 \ni y_*, U_2 \supset F(x_*), U_1 \cap U_2 = \emptyset,$ が存在する．このとき，F が上半連続であるから，x_* を要素として持つ X の開集合 V が存在して，$\bigcup_{x\in V} F(x) \subset U_2$ とできる．$x_n \to x_*$ であるから，十分大きな全ての n について $(x_n, y_n) \in V \times U_2$. 一方 $(x_*, y_*) \in V \times U_1$ であり，$V \times U_1 \cap V \times U_2 = \emptyset$，また $V \times U_1$ は $X \times Y$ の開集合であるから，(x_n, y_n) は (x_*, y_*) に収束し得ない．これはそもそもの前提に反する． **(Q.E.D.)**

仮に，関数を single valuded の対応とみなすならば，上に述べた上半連続性とはすなわち関数の連続性に他ならない.（各自確認せよ.）

Definition 4.13 **(下半連続対応)** $(X, \mathfrak{T}_X)$ および $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ を位相空間とする．X から Y への対応 F が**点 $x \in X$ において下半連続**であるとは，$F(x)$ との共通部分が空でないような Y における任意の開集合 U に対して，x を要素として持つ X の開集合 V が存在して，$\forall x' \in V, F(x') \cap U \neq \emptyset$ とできることをいう．F が X の全ての点において下半連続であるとき，単に F は**下半連続**であると言う．

Theorem 4.14 (X, d_X) および (Y, d_Y) を距離空間とし，F を X から Y への対応とする．このとき以下の二つの条件は，同値である．

(i) $x_n \to x_*$ を X 上で収束する任意の点列とし，y_* を $F(x_*)$ の任意の要素とするとき，Y 上の点列 $\{y_n\}_{n \in N}$ で，$\forall n \in N, y_n \in F(x_n)$ を満たしながら $y_n \to y_*$ となるものが存在する．

(ii) F は下半連続対応である．

(証明) (i) $\Longrightarrow$ (ii).

F が下半連続対応でないとする．すなわち，ある点 $\bar{x} \in X$ において，Y における開集合 U で $U \cap F(\bar{x}) \neq \emptyset$ なるものが存在して，$\bar{x}$ を要素として持つ開集合 $V \subset X$ をどのようにとっても，ある $x \in V$ に関して $F(x) \cap U = \emptyset$ となってしまう，ものとする．上の V として $\bar{x}$ の $\frac{1}{n}$ 開近傍 $B_{\frac{1}{n}}(\bar{x})$ をとり，各 n について $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(\bar{x})$ を $F(x_n) \cap U = \emptyset$ ならしめる要素としてとる（選択公理）と，明らかに $x_n \to x_*$．また，y_* を $U \cap F(\bar{x}) \neq \emptyset$ の要素としてとると，条件 (i) により，Y 上の点列 $\{y_n\}_{n \in N}$ で，$\forall n \in N, y_n \in F(x_n)$ を満たしながら $y_n \to y_*$ となるものが存在する．ところが今，上に述べた x_n の定め方から，$\forall n \in N, F(x_n) \cap U = \emptyset$ なのだから，$\forall n \in N, y_n \in F(x_n) \subset Y \setminus U$. すなわち $\{y_n\}_{n \in N}$ は閉集合 $Y \setminus U$ 上の点列であり，$y_* \in U$ に収束することはありえない．これは矛盾である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i).

F を下半連続対応とする．また，$x_n \to x_*$ を X 上の任意の収束する点列とし，$y_* \in F(x_*)$ とする．証明すべきことは，(i) で主張されるような点列 $\{y_n\}$ の存在である．$n = 1, 2, \cdots,$ について y_* の $\frac{1}{m}$ 開近傍 $B_{\frac{1}{m}}(y_*)$ をとる．F の下半連続性により，各 $m = 1, 2, \cdots,$ について，x_* を要素として持つ X の開集合 V_m が存在して，$\forall x \in V_m, F(x) \cap B_{\frac{1}{m}}(y_*) \neq \emptyset$ とできる．そこで，m を固定して，点列 $\{y_n^m\}_{n \in N}$ を $x_n \notin V_m$ であるような n については y_n^m は $F(x_n)$ の任意の要素としてとり（選択公理），$x_n \in V_m$ であるような n については，y_n^m を $F(x_n) \cap B_{\frac{1}{m}}(y_*) \neq \emptyset$ の任意の要素としてとる（選択公理）ものとして，定義する．この定義は任意の $m \in N$ に対して可能であるから，我々は点列の列 $\{y_n^1\}_{n \in N}, \{y_n^2\}_{n \in N}, \cdots,$ を得る．さて，この点列の列を用いて，$\{y_n\}_{n \in N}$ を以下のように定義する．まず，V_1 に対して，ある番号 $\bar{n}_1$ が存在し，$\forall n \geq \bar{n}_1$, $x_n \in V_1$ であるが，そのような番号の一つ $\bar{n}_1$ を用いて，$\forall n \leq \bar{n}_1$, $y_n = y_n^1$ と定める．さらに,，V_2 に対して，ある番号 $\bar{n}_2 > n_1$ が存在し，$\forall n \geq \bar{n}_2$, $x_n \in V_2$ であるが，そのような番号の一つ n_2 を用いて，$\forall n, n_1 < n \leq \bar{n}_2$, $y_n = y_n^1$ と定める．続いて，V_3 に対して，ある番号 $\bar{n}_3 > \bar{n}_2$ が存在し，$\forall n \geq \bar{n}_3$, $x_n \in V_3$ であるが，そのような番号の一つ $\bar{n}_3$ を用いて，$\forall n, \bar{n}_2 < n \leq \bar{n}_3$, $y_n = y_n^2$ と定める．以下同様に，$(m = 4, 5, \cdots,)$, V_m に対して，ある番号 $\bar{n}_m > \bar{n}_{m-1}$ が存在し，$\forall n \geq \bar{n}_m$, $x_n \in V_m$ であるが，そのような番号の一つ $\bar{n}_m$ を用いて，$\forall n, \bar{n}_{m-1} < n \leq \bar{n}_m$, $y_n = y_n^{m-1}$ と定める．このように定義された $\{y_n\}_{n \in N}$ は (i) で主張された条件を満たす．実際，y_n^m の定義から，$\forall m, \forall n, y_n^m \in F(x_n)$ であるから，$\forall n, y_n \in F(x_n)$．そして，$\forall \bar{n}, \forall m \geq 2, \forall n \geq \bar{n}_{m-1}, x_n \in V_{m-1}$ であるから $\forall \bar{n}, \forall m \geq 2, \forall n \geq \bar{n}_{m-1}, y_n^{m-1} \in B_{\frac{1}{m-1}}(y_*)$, すなわち $\forall \bar{n}, \forall m \geq 2, \forall n, \bar{n}_{m-1} < n \leq \bar{n}_m, y_n = y_n^{m-1} \in B_{\frac{1}{m-1}}(y_*)$ であるから，$y_n \to y_*$. **(Q.E.D.)**

4.2.6　供給関数（対応）

$\boldsymbol{R}^\ell$ のある部分集合 Δ 上で利潤関数 $\pi_j : \Delta \to \boldsymbol{R}$ が，$\pi_j : \Delta \ni p \mapsto \max_{y \in Y_j} p \cdot y \in \boldsymbol{R}$ という形で与えられているものとしよう．このとき各 $p \in \Delta$ に対して p のもとでの最大利潤 $\pi_j(p)$ を $\pi_j(p) = p \cdot y^*$ として実現す

るような y^*（唯一とは限らないが，先の利潤関数の定義からすれば，それは必ず存在する）からなる集合を対応づけることが考えられる．これが生産主体 j の供給対応である．

Definition 4.15 : π_j を，$\boldsymbol{R}^\ell$ の部分集合 Δ 上で定義された生産主体 j の利潤関数とする．各 $p \in \Delta$ に対して集合 $\{y^* \in Y_j | \, p \cdot y^* = \pi_j(p)\} \neq \emptyset$ を与える Δ から $\boldsymbol{R}^\ell$ への対応（一般に 1 対多 ）を η_j で表し，生産主体 j の**供給対応**と呼ぶ．特に各 $p \in \Delta$ に対して $\eta_j(p) = \{y^* | \, p \cdot y^* = \pi_j(p)\}$ が唯一つの点のみからなるとき，η_j は関数とみなせる．これを生産主体 j の**供給関数**と呼ぶ．

先に我々は Y_j が有界かつ閉であるとき，利潤関数 π_j が連続関数になることを見た．Y_j をこのように限定すれば，供給対応 η_j に関してもそれと同様の結果を得る．(Y_j が有界かつ閉であれば，供給関数の定義域も $\Delta = R^\ell$ ととれることに注意.）

Theorem 4.16 : Y_j を有界かつ閉（コンパクト）な $\boldsymbol{R}^\ell$ の部分集合とする．$p \in R^\ell$ に対して $\eta_j(p) = \{y^* \in Y_j | \, p \cdot y^* = \pi_j(p)\}$ で定義される対応 η_j は以下の性質を持つ．

(i) η_j のグラフ，$\{(p, y^*) | \, p \in R^\ell, y^* \in \eta_j(p)\} \subset R^\ell \times R^\ell$，は $R^\ell \times R^\ell$ の閉部分集合である．(上半連続性[23])

(ii) 各 $p \in R^\ell$ に対して，$\eta_j(p)$ は非空な閉集合である．またもしも Y_j が凸集合であれば，$\eta_j(p)$ も凸集合である．

(iii) η_j が定義域 R^ℓ 上での関数と見なせるとき，η_j は連続関数となる．

Proof: **(i)** $\{p^n\}_{n=1}^\infty$ を R^ℓ 内の点列で $p^* \in R^\ell$ に収束するものとし，$\{y^n\}_{n=1}^\infty$ を各 $n = 1, 2, \cdots$ について $y^n \in \eta_j(p^n)$ を満たしながら $y^* \in R^\ell$ に収束する点列とする．Y_j は閉集合なので $y^* \in Y_j$ となる．証明すべき事は，$y^* \in \eta_j(p^*)$ ということである．結論を否定すると，$p^* \cdot y^* < \pi_j(p^*)$，すなわちある $y^{**} \in Y_j$ が存在して，

$$p^* \cdot y^* < p^* \cdot y^{**}$$

となる．$p^n \to p^*$ かつ $y^n \to y^*$ であるから，このとき内積の連続性によって十分大きな番号 m が存在して

$$p^m \cdot y^m < p^m \cdot y^{**}$$

となる．これは $y^m \in \eta_j(p^m)$ すなわち $p^m \cdot y^m = \pi_j(p^m)$ に矛盾する．**(ii)** 前述したように，$\pi_j(p)$ が非空であることは明らか．またもしも Y_j が凸であれば，任意の $p \in \Delta$ および $y^1, y^2 \in \eta_j(p)$，そして実数 a, $0 \leq a \leq 1$ に対して，

$$p \cdot y^1 = ap \cdot y^1 + (1-a)p \cdot y^2 = p \cdot (ay^1 + (1-a)y^2)$$

であり $ay^1 + (1-a)y^2 \in Y_j$ であるから，$\eta_j(p)$ は凸集合である．$\eta_j(p)$ が閉集合であることは，$y^n \to y$ ならば $p \cdot y^n \to p \cdot y$ より明らかである．**(iii)** $p^n \to p^*$ とし，$\{y^n\} = \eta_j(p^n)$, $n = 1, 2, \cdots$, とする．証明すべきことは $\{y^n\}_{n=1}^\infty$ が $y^* \in Y_j$, $\{y^*\} = \eta_j(p^*)$ に収束することである．結論を否定すると，ある $\epsilon > 0$ が存在して y^* の ϵ 近傍 $B(\epsilon, y^*)$ について，$n_1, n_2, \cdots$ という無限に多くの番号について $y^{n_i} \notin B(\epsilon, y^*)$, $i = 1, 2, \cdots$ とすることができる．値域 Y_j はコンパクトであるから，$\{y^n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{y^{n_i}\}_{i=1}^\infty$ に対して，さらに収束する部分列 $\{y^{m_i}\}_{i=1}^\infty$ が存在する．部分列の収束先は Y_j の要素であるから，グラフが閉であるという (i) の結論および $p^{m_i} \to p^*$ より $\{y^{m_i}\}_{i=1}^\infty$ の収束先は $\eta_j(p^*)$ の要素，すなわち y^* にほかならない．ところがこれは，$\{y^{m_i}\}_{i=1}^\infty$ が $\{y^{n_i}\}_{i=1}^\infty$ の部分列であり，$B(\epsilon, y^*)$ の外側にしか存在しないという事実に反する．　*Q.E.D.*

[23] グラフが閉集合であるという性質は，本来は上半連続性とは異なる概念であるが，値域がコンパクトである場合には定理 4.12 で示したように (閉グラフ) $\Longleftrightarrow$ (閉値上半連続) が成立する．(他にも知りたければ, 二階堂副包 (二階堂, 1965), (Nikaido, 1968), 丸山徹 (丸山, 1995) 等を見よ.）

4.2.7 Maximum Theorem

前項およびその前の 2 つの項で述べた定理と本質的には同様の主張が，経済学において非常に頻繁に出現する．それは，何等かの最大化問題（最小化問題でも同様だが，以下では最大化問題に限る）を与えられたとき，

(i) その最大化問題のパラメターの変化に対して，得られた最大値の連続性,

(ii) その最大化問題のパラメターの変化に対して，最大値を実現する解の連続性,

についての主張である．この主張は次に述べる Maximum Theorem という形でまとめることができる．

Theorem 4.17 **(Maximum Theorem)** (X, d_X) を距離空間，(Y, d_Y) をコンパクト距離空間とする.[24] f を $X \times Y$ から R への連続関数とし，F を X から Y への連続対応で，非空閉値とする．このとき，

(i) $\varphi(x) = \max\{f(x,y)|y \in F(x)\}$ は連続関数である．

(ii) $\Phi(x) = \{y|y \in F(x), f(x,y) = \varphi(x)\}$ は上半連続対応である．

(証明) (i) $\{x^n\}_{n\in N}$ を X 上で x^* に収束する点列とする．このとき $\{\varphi(x^n)\}_{n\in N}$ が Y 上で $\varphi(x^*)$ に収束することを示す．結論を否定すると，ある $\epsilon > 0$ が存在して，$\varphi(x^n)$ は無限回 $\varphi(x^*) + \epsilon$ より大きくなるか，無限回 $\varphi(x^*) - \epsilon$ より小さくなるかのいずれかである．そこで $\{x^n\}_{n\in N}$ の部分列 $\{x^n\}_{n\in N'}$ を，$\forall n \in N'$, $\varphi(x^n) > \varphi(x^*) + \epsilon$, または $\forall n \in N'$, $\varphi(x^n) < \varphi(x^*) - \epsilon$ のいずれかにとる.（上に述べたように，いずれかにはとれるはずである.）各 $n \in N$ について，y^n でもって $\varphi(x^n) = f(x^n, y^n)$ を満たす $F(x^n)$ の要素（複数あるときは任意の一つ）を表すことにし（選択公理），y^* でもって，$\varphi(x^*) = f(x^*, y^*)$ なる $F(x^*)$ の要素（複数あるときは，任意の一つ）を表す．このとき F の lower semi-continuity によって（先の Theorem (4.14) より），$\exists\{z^n\}_{n\in N}$, $\forall n \in N, z^n \in F(x^n)$, $\lim z^n = y^*$ が言える．f の連続性から $\lim f(x^n, z^n) = f(x^*, y^*)$ であり，$\forall n \in N$, $f(x^n, y^n) \geq f(x^n, z^n)$ であるから，実は n を十分に大きくとれば，$f(x^n, y^n) > f(x^*, y^*) - \epsilon$ であることが分かる．もしも $\forall n \in N'$, $\varphi(x^n) < \varphi(x^*) - \epsilon$ であるならば，これは $\forall n \in N'$, $f(x^n, y^n) < f(x^*, y^*) - \epsilon$ ということだから，明らかに矛盾する．よって，上でとった部分列について実は,

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in N', \varphi(x^n) > \varphi(x^*) + \epsilon, \tag{11}$$

の場合しか有り得ないことが分かる．一方 F の値域が有界であることから，$\{y^n\}_{n\in N'}$ は収束する部分列 $\{y^n\}_{n\in N''}$ を持つ．F の閉グラフ性（ Theorem 4.12 ）から，$y^{**} = \lim_{n\in N''} y^n$ は $F(x^*)$ に属する．f の連続性によって，$\varphi(x^*) \geq f(x^*, y^{**}) = \lim_{n\in N''} f(x^n, y^n)$ であるから，

$$\forall \epsilon > 0, \exists \bar{n} \in N'', \forall n \geq \bar{n}, \varphi(x^*) + \epsilon > f(x^n, y^n), \tag{12}$$

とできる．これは，式 (11) に矛盾する．

(ii) $\{x^n\}_{n\in N}$ を X 上で x^* に収束する点列とする．また，$\{y^n\}_{n\in N}$ を $\forall n \in N, y^n \in \Phi(x^n)$ であり，かつ Y 上で y^* に収束する点列とする．証明すべき内容は，$y^* \in \Phi(x^*)$ である.（やはり Theorem 4.12 より，上半連続性を示すには，閉写像であることが言えれば十分である.）結論を否定すると,（F の上半連続性，従って閉グラフ性，から $y^* \in F(x^*)$ であることは分かっているので）

$$\exists y^{**} \in F(x^*), f(x^*, y^*) < f(x^*, y^{**}), \tag{13}$$

となるはずである．ところが F の下半連続性（および Theorem 4.14 ）より，$\exists\{z^n\}_{n\in N}, \forall n \in N, z^n \in F(x^n), \lim_{n\in N} z^n = y^{**}$, であり，$f$ の連続性から $\lim_{n\in N} f(x^n, z^n) = f(x^*, y^{**})$. 一方，$\forall n \in N, f(x^n, z^n) \leq f(x^n, y^n)$ であるから，$f(x^*, y^{**}) = \lim_{n\in N} f(x^n, z^n) \leq \lim_{n\in N} f(x^n, y^n) = f(x^*, y^*)$. これは，式 (13) に反する． **(Q.E.D.)**

[24] より一般に，(Y, d_Y) を単に距離空間とし，F をコンパクト値としても，定理は成立する.（例えば Ichiishi (Ichiishi, 1983), p.37, 等を見よ.）通常の経済学的な使用に際しては，ここに述べた主張で十分であろう．

4.3 微分可能な生産関数に基づく議論

4.3.1 逆関数定理と陰関数定理

ここでは陰関数定理を，まず非常にシンプルな特殊ケースとして，次にいくぶん一般的な形で，2 種類紹介する．神谷・浦井 (神谷・浦井, 1996)，あるいは通常の解析学の入門書（例えばスピヴァック (Spivak, 1965)，杉浦 (杉浦, 1980, 85), Dieudonné (1960) 等）も参照せよ．より抽象的な形でこれらの定理を必要とする場合は (Lang, 1995) を見よ．

ベクトル空間で話をすることの利点の一つは，いくつかの変数，関数の組のようなものを一つにまとめて描いてしまえること，例えば方程式系のようなものを考えるときでも 1 本の方程式で済んでしまうこと，というのがあるので，以下で書いた陰関数定理 I, II のように方程式系に対する定理という形で陰関数定理を記述することは，そもそも数学者の趣味ではない．しかしながら，経済学の数学的議論においてこの定理に依存する頻度と重要性からすれば，以下で述べるような形で（多少表記が長くなるとしても）定理を与えることが望ましく思われる．

ここでの陰関数定理の証明は，最初に述べる逆関数定理を基にするもので，陰関数定理の証明としてはもっともポピュラーで筋道も分かりやすいものである．事実，逆関数定理をもとにすれば，陰関数定理はほとんどその系にすぎない．そして逆関数定理はその証明にいくらか手間がかかるものの，定理そのものとしては「線型関数で局所的に近似するとはどういうことか」という微分の概念の根本そのものに関わる性質であり，その内容を非常に把握しやすいものだからである．この項ではまず逆関数定理とその証明を与える．定理は「微分という形で線形関数（導値）をもって局所的に近似されている関数は，その線形近似が 1 対 1 であるなら，それ自身も局所的には 1 対 1 である」ということを述べている．

Theorem 4.18 （逆関数定理）: f を R^m の開集合 U から R^n への C^r 級 $(r \geq 1)$ 写像とし，ある点 x^* において $Df(x^*)$ が one to one, onto であったとする．このとき x^* と $f(x^*)$ の近傍をとれば f もまた one to one, onto であり，その局所的に考え得る逆関数 f^{-1} もまた C^r 級である．

Proof: $Df(x^*) : R^m \to R^n$ に与えられた条件から当然 $m = n$ と考えて良い．また，f に代えて $Df(x^*)^{-1} \circ f$ に対して定理が成立すれば明らかに f に対しても定理が成立するので，$Df(x^*) = I$, 恒等写像，と考えて差し支えない．まず f がいかに x^* の $1/\nu$ 近傍 U^ν を小さくとっても one to one でないと仮定して矛盾が導かれることを見よう．このとき $a^\nu, b^\nu \in U^\nu$ が存在して，$f(a^\nu) = f(b^\nu) \in R^n$ なることが全ての ν で成立する．以下 $h_1^\nu = a^\nu - x^*$, $h_2^\nu = b^\nu - x^*$ と記す．さて $x + h \in U^\nu$ なるような h をとれば，微分可能の定義により

$$f(x^* + h) = f(x^*) + Df(x^*)h + \psi(h) \tag{14}$$

とおいて ψ が tangent to 0，すなわち十分小さく任意に $h \to 0$ をとれば式 (14) が成立してかつ $\|\psi(h)\|/\|h\| \to 0$. 特に $h_1^\nu \to 0$ と $h_2^\nu \to 0$ にこの事実を適用し，$f(x^*, h_1^\nu) = f(x^*, h_2^\nu)$ を用いる（各 ν ごとに辺々引き算して極限をとる）と $h_3^\nu = h_1^\nu - h_2^\nu$ と書いて

$$\|\frac{Df(x^*)(h_3^\nu)\|}{\|h_3^\nu\|} = \|Df(x^*)\frac{h_3^\nu}{\|h_3^\nu\|}\| \to 0.$$

ここで $Df(x^*) = I$ であることを考慮すれば，上のような事態は決して生じ得ないので矛盾．よって f は x^* の十分小さな近傍上で one to one でなければならない．従って十分小さな x^* の近傍 U^ν 上で，$f : U^\nu \to V$, $V = f(U^\nu)$, f は one to one とでき，$f^{-1} : V \to U^\nu$ を考えることができる．次に，この局所的な逆関数 $f^{-1} : V \to U^\nu$ が C^r 級であることを見る．$g(x) = f(x) - x$ と置くと，$Dg(x^*) = Df(x^*) - I = 0$ かつ $Df(x)$ の（行列）成分はすべて $x \in U^\nu$ 上連続だから ν を大きくとればいくらでも絶対値を小さくでき，$Dg(x)$ の成

分も同様なので平均値の定理によって U^ν 上 $\|g(x)-g(y)\|$ は例えば $0.5\|x-y\|$ で抑えることができるとして良い．すると，

$$\begin{aligned}\|x-y\| &\le \|(x-f(x))-(y-f(y))+(f(x)-f(y))\| \\ &\le \|g(x)-g(y)\|+\|f(x)-f(y)\| \le 0.5\|x-y\|+\|f(x)-f(y)\|\end{aligned}$$

すなわち

$$\|x-y\| \le 2\|f(x)-f(y)\| \tag{15}$$

となり，f^{-1} は連続．f^{-1} が V 上微分可能であることは，$x_1, y_1 \in V$ に対して $x_0 = f^{-1}(x_1)$, $y_0 = f^{-1}(y_1)$, $h_1 = y_1 - x_1$, $h_0 = y_0 - x_0$ と書いて，

$$\begin{aligned}\|f^{-1}(x_1+h_1)-f^{-1}(x_1)-Df(x_0)^{-1}h_1\| &= \|y_0-x_0-Df(x_0)^{-1}h_1\| \\ =\|Df(x_0)^{-1}Df(x_0)(y_0-x_0-Df(x_0)^{-1}h_1)\| &\le \|Df(x_0)^{-1}\|\|Df(x_0)h_0-h_1\| \\ =\|Df(x_0)^{-1}\|\|Df(x_0)h_0-(y_1-x_1)\| &= \|Df(x_0)^{-1}\|\|Df(x_0)h_0-(f(x_0+h_0)-f(x_0))\|\end{aligned}$$

となる．ここで f の微分可能性から最右辺が $\|h_0\|$ より高位の無限小（最右辺／$\|h_0\|$ が $\|h_0\|>0, \|h_0\| \to 0$ のとき 0 に収束）である．式 (15) で見たように，$\|h_0\|/\|h_1\| \le 2$ と考えて良く，また当然 $h_1 \to 0$ のとき $h_0 \to 0$（f^{-1} は連続）であるので，最右辺（従って最左辺）は $\|h_1\|$ より高位の無限小でもある．もちろんこのことは f^{-1} の x_1 における微分可能性に他ならず，導値も $Df(x_0)^{-1} = Df(f^{-1}(x_1))^{-1}$ であり，これは明らかに x_1 について連続であるから f^{-1} は C^1 級である．最後に $Df^{-1}(x) = Df(f^{-1}(x))^{-1}$ であるという事実は f^{-1} を φ，逆像を持つ R^n からそれ自体への線型写像の集合上で定義され，その集合上に値をとる「逆像をとる」という操作（関数）を Θ と書けば，$D\varphi(x) = \Theta(Df(\varphi(x)))$ であり Df が C^{r-1} 級，Θ が C^∞ 級（成分ごとで考えれば det と同様）なので φ は C^r 級． **(Q.E.D.)**

THEOREM 4.19（陰関数定理 I）: $m+1$ 個の実変数 $x, y_1, \cdots, y_m$ についての方程式

$$f(x, y_1, \cdots, y_m) = 0 \tag{16}$$

が $(x^*, y_1^*, \cdots, y_m^*) \in \boldsymbol{R}^{m+1}$ という解を持つとする．f が $\boldsymbol{R}^{m+1}$ のある開集合 A 上 C^r 級 $(r \ge 1)$ であり，かつ $(x^*, y_1^*, \cdots, y_m^*) \in A$ における導値に関して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y_1^*, \cdots, y_m^*) \ne 0$$

が成立したとしよう．このとき，$x^* \in \boldsymbol{R}^1$ の開近傍 U と $(y_1^*, \cdots, y_m^*) \in \boldsymbol{R}^m$ の開近傍 V が存在して，各 $(y_1, \cdots, y_m) \in V$ に対して式 (16) を満たすような $x \in U$ が唯一つであるようにすることができる．すなわち式 (16) を満たす解の全体は，$(x^*, y_1^*, \cdots, y_m^*)$ の近傍 $U \times V$ に話を限れば，ある関数 $g: V \to U$ を用いて

$$x = g(y_1, \cdots, y_m)$$

を満たすような $(x, y_1, y_2, \cdots, y_m)$ の全体として表現することができる．しかもこのとき，m 変数関数 g も C^r 級であり，その $\hat{y} = (\hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_m) \in V$ における導値は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1}(\hat{y}) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial y_m}(\hat{y}) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y})} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}(\hat{x}, \hat{y}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_m}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix}$$

で与えられる．(ただしここで $\hat{x} = g(\hat{y})$ である．)

PROOF: 次の定理の特殊ケース．

上で述べた陰関数定理 I は特殊な形のものであるが，経済学で用いる陰関数定理の多くの事例をカバーしている．定理における f を g という形に持って行けるということは，直観的に言うと “制約式 (16) を用いて変数 x を消すことができる” ということにほかならない．次に紹介する陰関数定理 II はその自然な拡張であって，直観的には “n 本の制約式から n 個の変数を消せるための条件” を述べたものである．

Theorem 4.20（陰関数定理 II）: $n+\ell$ 個の実変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_m$ に関する n 本の方程式からなる系

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_\ell) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_\ell) &= 0 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_\ell) &= 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

が，$(x^*, p^*) = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, p_1^*, \cdots, p_\ell^*) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^\ell$ という解を持ち，また n 本の $n+\ell$ 変数関数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ が全て $\boldsymbol{R}^{n+\ell}$ 上のある開集合 A 上 C^r 級 $(r \geq 1)$ であるものとする．さて，いま $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, p_1^*, \cdots, p_\ell^*) \in A$ における $f_1, f_2, \cdots, f_n$ それぞれの偏導値についての関係式

$$
\det \begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*, p^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x^*, p^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*, p^*) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*, p^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x^*, p^*) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*, p^*) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*, p^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x^*, p^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*, p^*)
\end{pmatrix} \neq 0
$$

が成立したとしよう．このとき，$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) \in \boldsymbol{R}^n$ の開近傍 U と $(p_1^*, \cdots, p_\ell^*) \in \boldsymbol{R}^\ell$ の開近傍 V が存在して，各 $(p_1, \cdots, p_\ell) \in V$ に対して方程式系 (17) を満たすような $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U$ が唯一つであるようにすることができる．すなわち (17) を満たす解の全体は，$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, p_1^*, \cdots, p_\ell^*)$ の近傍 $U \times V$ に話を限れば，ある関数 $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n) : V \to U$ を用いて

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g_1(p_1, \cdots, p_\ell) \\
x_2 &= g_2(p_1, \cdots, p_\ell) \\
&\vdots \\
x_n &= g_n(p_1, \cdots, p_\ell)
\end{aligned}
$$

を満たすような $(x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_\ell)$ の全体として表現することができる．しかもこのとき，ℓ 変数関数 $g = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$ も C^r 級であり，その $\hat{p} = (\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_\ell) \in V$ における導値は（ $\hat{x} = g(\hat{p})$ として）

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\partial g_1}{\partial p_1}(\hat{p}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial p_\ell}(\hat{p}) \\
\frac{\partial g_2}{\partial p_1}(\hat{p}) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial p_\ell}(\hat{p}) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial g_n}{\partial p_1}(\hat{p}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial p_\ell}(\hat{p})
\end{pmatrix}
= -
\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}, \hat{p}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}, \hat{p}) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}, \hat{p}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}, \hat{p}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}, \hat{p}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}, \hat{p})
\end{pmatrix}^{-1}
\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial p_1}(\hat{x}, \hat{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial p_\ell}(\hat{x}, \hat{p}) \\
\frac{\partial f_2}{\partial p_1}(\hat{x}, \hat{p}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial p_\ell}(\hat{x}, \hat{p}) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial p_1}(\hat{x}, \hat{p}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial p_\ell}(\hat{x}, \hat{p})
\end{pmatrix}
$$

で与えられる.（つまり，$f(x(p), p) = 0$ の両辺を微分して得られる式, $D_x f(x(\hat{p}), \hat{p}) Dx(\hat{p}) + D_p f(x(\hat{p}), \hat{p}) = 0$ ということ.）

Proof: ここでは，逆関数定理を所与とした証明を与える．逆関数定理について証明が必要なら神谷・浦井 (1996) 等を見よ．逆関数定理を所与とする．$F(x, p)$ を $(f(x, p), p)$ と定義すれば，逆関数定理から (x^*, p^*)

の近傍で F^{-1} が存在する．$F(x^*,p^*)=(0,p^*)$ であることと，F の one one 性から，local には p を決めれば $F(x,p)$ で $(0,p)$ に写る x が $x(p)=\mathrm{pr}_{R^n}F^{-1}(0,p)$ として一意的に定まる.（ここで pr_{R^n} は最初の n 次元への射影である.）逆関数定理から，これが微分可能であることはすでに言えている．この導値の具体形は $f(x(p),p)=0$ の両辺を p で微分して $D_x f(x(p),p)Dx(p)+D_p f(x(p),p)=0$ なる事から従う．　**(Q.E.D.)**

4.3.2　生産関数

以下では，あらかじめ微分可能性の仮定された生産関数を出発点とした生産主体の行動の記述について解説する．全体を貫く思想は生産集合に基づく場合と全く同じであり，生産行動を決定する基本的問題は「価格（および技術）を所与とした利潤最大化」である．ただし，生産主体 j の生産計画 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_\ell)$ に関する技術的制約が $y\in Y_j$ でなく，何らかの関数 f によって $f(y_1,y_2,\cdots,y_\ell)=0$ のような形で表されているものとしよう．これは Y_j そのものと考えても良いし，Y_j の効率的な境界部分と考えても良い．

以下，価格 $p^*=(p_1^*,p_2^*,\cdots,p_\ell^*)$ の下での生産主体 j の利潤最大化問題が次のような形で与えられているものとしよう．

$$
\begin{aligned}
&\text{Max.} && p^*\cdot y \\
&\text{Subject to} && f(y_1,y_2,\cdots,y_\ell)=0
\end{aligned}
\tag{18}
$$

ここで $f:R^\ell\to\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}^\ell$ 上 2 回連続的微分可能 (C^2 級) であるものとしておく.（f の定義域を $\boldsymbol{R}^\ell$ にとるのは，単に Notation の簡単化のためである.）さて，(18) は数学的な言い方をすれば制約条件付き最大化問題であり，通常 Lagrange の未定乗数法などによってその必要条件から解を特定化できることが多い．ここでは先に述べた陰関数定理 I, II のみを用いて，同様の議論をおこなう．

仮に最大化問題 (18) に解 $y^*=(y_1^*,y_2^*,\cdots,y_\ell^*)$ が存在したとする．更に y^* における f の偏導値のうち少なくとも一つは 0 でないものと仮定しよう．それが y_1 についての偏導値であったとして一般性は失わないであろうから，

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(y^*)\neq 0$$

と考える．このとき陰関数定理 I によって，y_1^* の近傍 U と $(y_2^*,\cdots,y_\ell^*)$ の近傍 V が存在して，y^* の近傍 $U\times V$ において f を満たす $(y_1,y_2,\cdots,y_\ell)$ の全体は

$$y_1=g(y_2,\cdots,y_\ell) \tag{19}$$

と一意的に表すことができる．またこのとき g も C^2 級であり，その導関数は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial y_2} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y_2}}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} \\
&\ \vdots \\
\frac{\partial g}{\partial y_\ell} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y_\ell}}{\frac{\partial f}{\partial y_1}}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

となる．もしも経済学的な意味合いから商品 1 が産出商品であり商品 $2\cdots$ 商品 ℓ が投入商品であることがはっきりと分かっているならば，g は**生産関数**と呼ばれる.（ただし投入商品の量はマイナスを付けて表現されている.）

従って条件付き最大化問題 (18) の解 y^* （もしあれば）の周辺において式 (19) を用いる事によって，y^* の周辺において (18) という最大化問題は次のような「条件無し最大化問題」に帰着させることができる．

$$\text{Max.}\qquad p_1^*g(y_2,\cdots,y_\ell)+p_2^*y_2+\cdots+p_\ell^*y_\ell \tag{21}$$

言うまでもなく，このような条件の付かない最大化問題の解 y^* （もしあれば）は，1 階の必要条件として次の方程式系

$$
\begin{aligned}
p_1^* \frac{\partial g}{\partial y_2} + p_2^* &= 0 \\
&\vdots \\
p_1^* \frac{\partial g}{\partial y_\ell} + p_\ell^* &= 0
\end{aligned}
\tag{22}
$$

を $(y_2^*, \cdots, y_\ell^*)$ で評価して同時に満たすようなものでなければならない．かくして，最大化問題 (18) の解を求める問題は，$\ell - 1$ 本の方程式からなる系 (22) の解を求める問題となった.[25]

4.3.3　供給関数

それでは方程式系 (22) の解について考えてみよう．前項の設定では系 (22) における g はあくまでその存在を仮定した特定の y^* に依存している．従って例えば価格を $p^* = (p_1^*, p_2^*, \cdots, p_\ell^*)$ から $p' = (p_1', p_2', \cdots, p_\ell')$ に変えた場合，系 (22) における p^* を p' に変えたものは，必ずしも最適解の必要条件を与えるものではない．しかしながら，もしここで $(p_1^*, p_2^*, \cdots, p_\ell^*) \in \boldsymbol{R}^\ell$ のある近傍 W が存在して，任意の $(p_1, p_2, \cdots, p_\ell) \in W$ に対する最大化問題の解がすべて上の $U \times V$ という範囲に入るものと仮定すれば（これは例えば供給関数の連続性を仮定すれば保証される），系 (22) の $p^* = (p_1^*, p_2^*, \cdots, p_\ell^*)$ を $p = (p_1, p_2, \cdots, p_\ell)$ という変数とみなした次の方程式系

$$
\begin{aligned}
p_1 \frac{\partial g}{\partial y_2} + p_2 &= 0 \\
&\vdots \\
p_1 \frac{\partial g}{\partial y_\ell} + p_\ell &= 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

は W 上の任意の $p = (p_1, p_2, \cdots, p_\ell)$ に対して最適解の必要条件を与えるものと考えて良い．

さて g は 2 階連続的微分可能であったから，系 (23) における $\frac{\partial g}{\partial y_i}$, $i = 2, \cdots, \ell$ は依然として連続的微分可能である．同時に，系 (23) の全ての式が $p_1, p_2, \cdots, p_\ell$ に関して連続な導関数を持つことは明らかであるから，系 (23) の全ての式は $y_2, \cdots, y_\ell$ および $p_1, p_2, \cdots, p_\ell$ の関数として C^1 級である．そこで陰関数定理 II を用いれば，もしも系 (23) を満たす $(y_2^*, \cdots, y_\ell^*)$, $(p_1^*, p_2^*, \cdots, p_\ell^*)$ において

$$
(p_1)^{\ell-1} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_2}(y_2^*, \cdots, y_\ell^*) & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_\ell}(y_2^*, \cdots, y_\ell^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_2}(y_2^*, \cdots, y_\ell^*) & \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_\ell}(y_2^*, \cdots, y_\ell^*) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{24}
$$

が成立しておれば,[26]点 $(y_2^*, \cdots, y_\ell^*)$ の近傍 $V^* \subset V$ と $(p_1^*, p_2^*, \cdots, p_\ell^*)$ の近傍 $W^* \subset W$ において，各 $(p_1, p_2, \cdots, p_\ell) \in W^*$ に対して系 (23) を満たす $(y_2, \cdots, y_\ell)$ は，W^* 上

$$
y_2 = \eta_2(p_1, \cdots, p_\ell)
$$

[25]式 (22) で与えられる 1 階の条件が，Lagrange 法による 1 階の条件と同じもの（Lagrange 乗数を消去した形）であることを確かめよ．一般に，Lagrange 未定乗数法によって条件付き最大化問題の解の満たすべき必要条件が得られることの証明は，陰関数定理を用いて制約条件なしの最大化問題に帰着させるという，上とまったく同様の手続きによってなされる．

[26] 式 (24) における g の 2 次の導値からなる行列を g のヘッセ行列と呼ぶ．g が凹関数であるとき，またその時に限ってこの行列は半負の定符号を持つ (Negative Semi-definite). 即ち，任意の $\ell - 1$ 次元ベクトルをその行列の左右からかけて ≤ 0 となる．非 0 ベクトルについて常に < 0 となる場合，負の定符号を持つ (Negative definite) という．Negative definite であれば，g は狭義凹関数となる．残念ながらこの逆は一般に成立しない．もしも Negative definite であれば，その行列式は 0 でないことが言える．(c.f. Mas-Colell, Whinston, and Green (Mas-Colell et al., 1995) の数学注 C, D.）

$$\vdots \tag{25}$$
$$y_\ell \quad = \quad \eta_\ell(p_1, \cdots, p_\ell)$$

と一意的に表現される．先にもとめた g を用いて y_1 とまとめて表現すれば（$W^* \subset W$ としたので，このようにまとめて良い），W^* 上

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\eta_2(p_1, \cdots, p_\ell), \cdots, \eta_\ell(p_1, \cdots, p_\ell)) \\ \eta_2(p_1, \cdots, p_\ell) \\ \vdots \\ \eta_\ell(p_1, \cdots, p_\ell) \end{pmatrix} \tag{26}$$

となる．右辺を $\eta(p_1, \cdots, p_\ell)$ と表せば，$\eta : W^* \to \boldsymbol{R}^\ell$ は最大化問題 (18) を解く生産主体の供給関数にほかならない．

陰関数定理によって η は C^1 級であり，その $\hat{p} = (\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_\ell) \in W^*$ における導値は，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_2}{\partial p_1}(\hat{p}) & \cdots & \frac{\partial \eta_2}{\partial p_\ell}(\hat{p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \eta_\ell}{\partial p_1}(\hat{p}) & \cdots & \frac{\partial \eta_\ell}{\partial p_\ell}(\hat{p}) \end{pmatrix} = -H_g(\hat{y})^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_2}(\hat{y}) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y_3}(\hat{y}) & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y_\ell(\hat{y})} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

をもとに得ることができる（ただし $\hat{y} = (\eta_2(\hat{p}), \ldots, \eta_\ell(\hat{p}))$ であり，$H_g(\hat{y})$ は $\hat{y}$ における g のヘッセ行列を表すものとする.）

4.3.4　利潤関数

微分法を用いない議論の場合と順序は逆になったが，ここで利潤関数について述べる．先ほどの記号を全くそのまま用いるが，η の第一成分 $g(\eta_2(p), \ldots, \eta_\ell(p))$ を，便宜上 $\eta_1(p)$ とも書くことにする．価格 $p = (p_1, p_2, \cdots, p_\ell) \in W^*$ に対して与えられる供給量 $\eta(p)$（投入は負で，産出は正で表現されている）をもとにして，利潤 $\pi(p)$ は次のように得られる．

$$\pi(p) = p \cdot \eta(p) = p_1 \cdot \eta_1(p) + p_2 \cdot \eta_2(p) + \cdots + p_\ell \cdot \eta_\ell(p). \tag{28}$$

η が W^* 上 C^1 級であるから，当然 π も C^1 級である．微分可能な利潤関数についての次の事実は有名である．

Theorem 4.21 (Hotelling's Lemma): 利潤関数 $\pi : W^* \to \boldsymbol{R}$，供給関数 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_\ell)$ および任意の $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \cdots, \hat{p}_\ell)$ について，

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_i}(\hat{p}) = \eta_i(\hat{p}),\ i = 1, 2, \ldots, \ell,$$

が成立する．

Proof: 定義より明らかに，

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_i}(\hat{p}) = \eta_i(\hat{p}) + \sum_{j=1}^{\ell} \hat{p}_j \frac{\partial \eta_j}{\partial p_i}(\hat{p}),$$

である．このとき右辺の第 2 項は，($\hat{y} = (\eta_2(\hat{p}), \cdots, \eta_\ell(\hat{p}))$ として)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\ell} \hat{p}_j \frac{\partial \eta_j}{\partial p_i}(\hat{p}) &= \hat{p}_1 \cdot (\sum_{k=2}^{\ell} \frac{\partial g}{\partial y_k}(\hat{y}) \frac{\partial \eta_k}{\partial p_i}(\hat{p})) + \hat{p}_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial p_i}(\hat{p}) + \cdots + \hat{p}_\ell \frac{\partial \eta_\ell}{\partial p_i}(\hat{p}), \\ &= \sum_{k=2}^{\ell} \frac{\partial \eta_k}{\partial p_i}(\hat{p})(\hat{p}_1 \frac{\partial g}{\partial y_k}(\hat{y}) + \hat{p}_k)\end{aligned}$$

と変形される．$\hat{p} \in W^*$ と $\hat{y}$ について (23) が成立することから，上式の最後の右辺は 0 となる． *Q.E.D.*

4.3.5　費用関数

ここでは生産主体の生産関数 g をあらかじめ固定して，産出物の量と投入商品の価格とを所与とした費用最小化問題について考える．生産主体の産出商品を商品 1 のみとし，投入商品を商品 2 から商品 ℓ とする．商品 1 の産出量 $\bar{y}_1$ と，投入商品の価格 $\bar{p}_2, \cdots, \bar{p}_\ell$ を所与とした，この生産主体の費用最小化問題とは，次のようなものである．

$$\begin{aligned}&\text{Min.} \quad \bar{p}_2(-y_2) + \cdots + \bar{p}_\ell(-y_\ell) \\ &\text{Subject to} \quad \bar{y}_1 = g(y_2, \cdots, y_\ell)\end{aligned} \tag{29}$$

ここで g は 2 回連続的微分可能であるものとしておく．先に利潤最大化問題の必要条件を与えた場合と同様に，制約条件式 $\bar{y}_1 - g(y_2, \cdots, y_\ell) = 0$ に陰関数定理 I を適用すれば，再びいずれかの変数を消して制約条件なしの最大化問題に持ち込むことが可能である．

例えば，制約式 $\bar{y}_1 - g(y_2, \cdots, y_\ell)$ を満たす $y^* = (\bar{y}_1, y_2^*, \cdots, y_\ell^*)$ において $\frac{\partial g}{\partial y_2}(y^*) \neq 0$ であれば，y_2^* の近傍 U と $(\bar{y}_1, y_3^*, \cdots, y_\ell^*)$ の近傍 V が存在し，$\bar{y}_1 - g(y_2, \cdots, y_\ell) = 0$ を満たす $y_2 \in U$ は V 上

$$y_2 = \psi_2(\bar{y}_1, y_3, \cdots, y_\ell) \tag{30}$$

のように一意的に表現できる．これは所与とされている生産量 y_1 のもとでの Input Requirement set （等量線）を表す曲線の方程式である．ψ_2 も 2 回連続的微分可能であり，y^* の近傍において

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y_i} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y_i}}{\frac{\partial g}{\partial y_2}}, \, i = 3, \cdots, \ell, \tag{31}$$

となる．

以下では少し方法を変え，Lagrange 未定乗数法を用いて議論を行う．固定されている生産関数 g および，生産量 $\bar{y}_1$, 投入商品の価格 $\bar{p}_2, \cdots, \bar{p}_\ell$ を所与とした最適化問題 (29) に，最適解 $y^* = (y_2^*, \cdots, y_\ell^*)$ が存在したとする．λ を Lagrange 乗数として，λ および $y_2, \cdots, y_\ell$ の関数

$$\mathfrak{L}(\lambda, y_2, \cdots, y_\ell) = \bar{p}_2(-y_2) + \cdots + \bar{p}_\ell(-y_\ell) + \lambda(\bar{y}_1 - g(y_2, \cdots, y_\ell))$$

が極値をとるための 1 階の条件として，方程式系

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 - g(y_2, \cdots, y_\ell) &= 0 \\ -\bar{p}_2 + \lambda \frac{\partial g}{\partial y_2} &= 0 \\ &\vdots \\ -\bar{p}_\ell + \lambda \frac{\partial g}{\partial y_\ell} &= 0\end{aligned} \tag{32}$$

を得る．もちろん最適解 $y^* = (y_2^*, \cdots, y_\ell^*)$ においては，上の系 (32) が満たされている．ここで陰関数定理 II を用いる．上の方程式系 (32) が $y_2 = y_2^*, \cdots, y_\ell = y_\ell^*, \lambda = \lambda^*$ という解を持ったとして，さらに

$$\det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^*) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial y_\ell}(y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial y_2}(y^*) & \lambda^* \frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_2}(y^*) & \cdots & \lambda^* \frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_\ell}(y^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial y_\ell}(y^*) & \lambda^* \frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_2}(y^*) & \cdots & \lambda^* \frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_\ell}(y^*) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{33}$$

が成立したとする．このとき，$(\lambda^*, y_2^*, \cdots, y_\ell^*) \in \boldsymbol{R}^\ell$ の近傍 V^* と $(\bar{y}_1, \bar{p}_2, \cdots, \bar{p}_\ell) \in \boldsymbol{R}^\ell$ の近傍 W^* が存在して，系 (32) における $(\bar{y}_1, \bar{p}_2, \cdots, \bar{p}_\ell)$ を $(y_1, p_2, \cdots, p_\ell) \in W^*$ に変えた式を満たす $(\lambda, y_2, \cdots, y_\ell) \in V^*$ は W^* 上一意的に

$$\begin{aligned} \lambda &= \psi_1(y_1, p_2, \cdots, p_\ell) \\ y_2 &= \psi_2(y_1, p_2, \cdots, p_\ell) \\ &\vdots \\ y_\ell &= \psi_\ell(y_1, p_2, \cdots, p_\ell) \end{aligned} \tag{34}$$

と表現できる．さらにこのとき各 ψ_i, $i = 1, 2, \cdots, \ell$ も系 (32) の各式と同様 W^* 上 C^1 級である．$\psi_2, \cdots, \psi_\ell$ は，産出物の量 y_1 および投入商品の価格 $p_2, \cdots, p_\ell$ に対して最適な投入商品の量を与える，必要投入関数 Input Requirement Function である（ただし投入量は負で表現されている）．また $\psi_1, \cdots, \psi_\ell$ の，点 $\hat{w} = (\hat{y}_1, \hat{p}_2, \cdots, \hat{p}_\ell) \in W^*$ における導値は $(\hat{\lambda} = \psi_1(\hat{w}), \hat{y} = (\psi_2(\hat{w}), \cdots, \psi_\ell(\hat{w}))$ として)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(\hat{w}) & \frac{\partial \psi_1}{\partial p_2}(\hat{w}) & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial p_\ell}(\hat{w}) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}(\hat{w}) & \frac{\partial \psi_2}{\partial p_2}(\hat{w}) & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial p_\ell}(\hat{w}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_\ell}{\partial y_1}(\hat{w}) & \frac{\partial \psi_\ell}{\partial p_2}(\hat{w}) & \cdots & \frac{\partial \psi_\ell}{\partial p_\ell}(\hat{w}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial y_2}(\hat{y}) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial y_\ell}(\hat{y}) \\ \frac{\partial g}{\partial y_2}(\hat{y}) & \hat{\lambda} \frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_2}(\hat{y}) & \cdots & \hat{\lambda} \frac{\partial^2 g}{\partial y_2 \partial y_\ell}(\hat{y}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial y_\ell}(\hat{y}) & \hat{\lambda} \frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_2}(\hat{y}) & \cdots & \hat{\lambda} \frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell \partial y_\ell}(\hat{y}) \end{pmatrix}^{-1} I \tag{35}$$

で得ることができる．ただし I は $\ell \times \ell$ 単位行列（系 32 を $(y_1, p_2, \ldots, p_\ell)$ で微分したもの）である．

上で得た必要投入関数 $\psi_2, \cdots, \psi_\ell$ を用いて，費用関数 $c : W^* \to \boldsymbol{R}$ が以下のように定まる．

$$c(y_1, p_2, \cdots, p_\ell) = p_2(-\psi_2(y_1, p_2, \cdots, p_\ell)) + \cdots + p_\ell(-\psi_\ell(y_1, p_2, \cdots, p_\ell)). \tag{36}$$

言うまでもなくこれは，決められた産出量を実現するための最小の総費用を与える関数である．費用関数の各投入商品の価格に関する偏導値が持つ次の性質は，先の利潤関数の偏導値に関する性質（Hotelling's Lemma）と双対をなすものとして知られる．

Theorem 4.22 (Shephard's Lemma): 上述の費用関数 $c : W^* \to \boldsymbol{R}$，必要投入関数 $(\psi_2, \cdots, \psi_\ell) : W^* \to \boldsymbol{R}^{\ell-1}$，および任意の $(\hat{y}_1, \hat{p}_2, \cdots, \hat{p}_\ell) \in W^*$ （ただし $\hat{p}_2, \cdots, \hat{p}_\ell$ のうち少なくとも一つは 0 でないものとする）について，

$$\frac{\partial c}{\partial p_i}(\hat{y}_1, \hat{p}_2, \cdots, \hat{p}_\ell) = -\psi_i(\hat{y}_1, \hat{p}_2, \cdots, \hat{p}_\ell),\ i = 2, \cdots, \ell$$

が成立する．

Proof: これまで通り，$\hat{w} = (\hat{y}_1, \hat{p}_2, \cdots, \hat{p}_\ell)$ および，$\hat{\lambda} = \psi_1(\hat{w})$, $\hat{y} = (\psi_2(\hat{w}), \cdots, \psi_\ell(\hat{w}))$ と記すことにする．費用関数 $c(y_1, p_2, \cdots, p_\ell) = p_2(-\psi_2(y_1, p_2, \cdots, p_\ell)) + \cdots + p_\ell(-\psi_\ell(y_1, p_2, \cdots, p_\ell))$ の $\hat{w}$ における変数 p_i に関する偏導値は，

$$-\psi_i(\hat{w}) - \sum_{j=2}^{\ell} \hat{p}_j \frac{\partial \psi_j}{\partial p_i}(\hat{w})$$

である．従って上式の第 2 項（$\sum_{j=2}^{\ell}$ で和をとった部分）が 0 になることを示せばよい．以下それを示す．$\hat{p}_2,\cdots,\hat{p}_\ell$ のうちの少なくとも一つは 0 でないから，方程式系 (32) より $\hat{\lambda}\neq 0$ である．さらにこのとき，系 (32) の第 2 式以降第 ℓ 式までを $\hat{\lambda}$ で割って，

$$\begin{aligned}\frac{\hat{p}_2}{\hat{\lambda}} &= \frac{\partial g}{\partial y_2}\\ &\vdots\\ \frac{\hat{p}_\ell}{\hat{\lambda}} &= \frac{\partial g}{\partial y_\ell}\end{aligned}\tag{37}$$

を得る．このことから，式 (35) の右辺にその逆行列が登場するところの行列に関して，

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial y_2}(\hat{y}) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial y_\ell}(\hat{y})\\ \frac{\partial g}{\partial y_2}(\hat{y}) & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_2\partial y_2}(\hat{y}) & \cdots & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_2\partial y_\ell}(\hat{y})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g}{\partial y_\ell}(\hat{y}) & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell\partial y_2}(\hat{y}) & \cdots & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell\partial y_\ell}(\hat{y})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hat{p}_2}{\hat{\lambda}} & \cdots & \frac{\hat{p}_\ell}{\hat{\lambda}}\\ \frac{\hat{p}_2}{\hat{\lambda}} & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_2\partial y_2}(\hat{y}) & \cdots & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_2\partial y_\ell}(\hat{y})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\hat{p}_\ell}{\hat{\lambda}} & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell\partial y_2}(\hat{y}) & \cdots & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell\partial y_\ell}(\hat{y})\end{pmatrix}$$

の成立が言える．上式の右辺を式 (35) の両辺に左からかけて，

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\hat{p}_2}{\hat{\lambda}} & \cdots & \frac{\hat{p}_\ell}{\hat{\lambda}}\\ \frac{\hat{p}_2}{\hat{\lambda}} & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_2\partial y_2}(\hat{y}) & \cdots & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_2\partial y_\ell}(\hat{y})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\hat{p}_\ell}{\hat{\lambda}} & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell\partial y_2}(\hat{y}) & \cdots & \hat{\lambda}\frac{\partial^2 g}{\partial y_\ell\partial y_\ell}(\hat{y})\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(\hat{w}) & \frac{\partial\psi_1}{\partial p_2}(\hat{w}) & \cdots & \frac{\partial\psi_1}{\partial p_\ell}(\hat{w})\\ \frac{\partial\psi_2}{\partial y_1}(\hat{w}) & \frac{\partial\psi_2}{\partial p_2}(\hat{w}) & \cdots & \frac{\partial\psi_2}{\partial p_\ell}(\hat{w})\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\psi_\ell}{\partial y_1}(\hat{w}) & \frac{\partial\psi_\ell}{\partial p_2}(\hat{w}) & \cdots & \frac{\partial\psi_\ell}{\partial p_\ell}(\hat{w})\end{pmatrix} = I \tag{38}$$

となる．式 (38) の右辺第 1 行 i 列（$i=2,\cdots,\ell$）が 0 であることから，

$$\sum_{j=2}^{\ell}\hat{p}_j\frac{\partial\psi_j}{\partial p_i}=0,\ i=2,\cdots,\ell \tag{39}$$

を得る． *Q.E.D.*

● 長期・短期費用関数と包絡線定理 envelope theorem

REFERENCES

Bourbaki, N. (1939-): *Eléments de Mathématique.* Hermann, Paris. English Translation: Springer-Verlag. 日本語訳: 東京図書.

Cohen, P. J. (1966): *Set Theoy and the Continuum Hypothesis.* W. A. Benjamin, New York. 日本語訳: コーヘン連続体仮説. 東京図書, Tokyo.

Debreu, G. (1959): *Theory of Value.* Yale University Press, New Haven, CT.

Dieudonné, J. (1960): *Foundations of Modern Analysis.* 日本語訳：『現代解析の基礎１・２』（森毅訳）1971, 東京図書，Tokyo.

福山 克 (1980): 『数理論理学』 培風館, Tokyo.

Hicks, J. (1939): *Value and Capital.* Clarendon Press, Oxford. 日本語訳: 価値と資本. 岩波書店, Tokyo.

Ichiishi, T. (1983): *Game Theory for Economic Analysis.* Academic Press, New York.

Jech, T. (1997): *Set Theory* Second edn. Springer-Varlag, Berlin.

神谷 和也・浦井 憲 (1996): 『経済学のための数学入門』 東京大学出版会, Tokyo.

Kelley, J. L. (1955): *General Topology.* Springer-Verlag, New york/Berlin.

Keynes, J. M. (1936): *The General Theory of Employment, Interest and Money.* 日本語訳：『雇用・利子および貨幣の一般理論』1995, 東洋経済新報社, Tokyo, JAPAN.

Kunen, K. (1980): *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs.* North Holland, Amsterdam.

Lang, S. (1995): *Differential and Riemannian Manifolds.* Springer-Verlag, New York.

丸山 徹 (1995): 『数理経済学の方法』 創文社, Tokyo.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., and Green, J. R. (1995): *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, New York.

Nikaido, H. (1956): "On the classical multilateral exchange problem," *Metroeconomica 8*, 135–145. A supplementary note: Metroeconomica, 8, 209–210, 1957.

Nikaido, H. (1968): *Convex Structures and Economic Theory.* Academic Press, New York.

二階堂 副包 (1965): 『現代経済学の数学的方法』 岩波書店, Tokyo.

Spivak, M. (1965): *Calculas on Manifolds.* Benjamin. 日本語訳: 多変数解析学—古典理論への現代的アプローチ. 東京図書, Tokyo, 1972.

杉浦 光夫 (1980, 85): 『解析入門 I · II』 東京大学出版会, Tokyo.

Takeuti, G. (1987): *Proof Theory* Second edn. North-Holland, Amsterdam · New York.

【生産主体の理論についての問題】

Exercise 4.1 （$\star\star\star$）定理 teiri:profitfunction において，もしも Y_j が有界でなければ利潤関数は必ずしも連続とは言えない．実際，Y_j が上に有界かつ閉集合である（ただし下に有界とは限らない）ときに，利潤関数が連続でなくなるような反例を示せ．(注意：間違える人が多いので注意しておきますが，定義域を空集合にしても，反例にはなりません.）

Exercise 4.2 （$\star$）定理 teiri:kyoukyuutaiou の (iii) の証明を参考にして，次のことを証明しなさい.「関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ の値域 $f[\boldsymbol{R}^n]$ が $\boldsymbol{R}^m$ の有界な部分集合であり，かつ f のグラフが $\boldsymbol{R}^{n+m}$ の閉部分集合であるとき，f は連続関数である」ということを証明せよ．

Exercise 4.3 （$\star$）Maximum Theorem（定理 4.17）を使って，Y_j が有界かつ閉のときの利潤関数の連続性と供給対応の上半連続性を示せ．

Exercise 4.4 （$\star$）節 4.3.2 から節 4.3.4 までの内容を，200 字程度に要約せよ．

Exercise 4.5 （$\star\star$）節 4.3.2 の最大化問題 (18) に直接 Lagrange 未定乗数法を適用するという方針で，節 4.3.3 全体を A4 用紙 2 枚程度に書き換えなさい．

Exercise 4.6 （$\star\star$）節 4.3.5 の議論で，Lagrange 未定乗数法を用いず，式 (30) を用いて (29) を条件無し最大化問題に持ち込んだ後，以下の問に答えよ．(i) その条件無し最大化問題およびその解の満たすべき 1 階の条件を書け．(ii) それに陰関数定理 II を適用して，必要投入関数を導出する手続きを述べよ．(iii) 上の (i) (ii) に基づいて，Shephard's Lemma を証明し直しなさい．

Exercise 4.7 （$\star\star\star$）単位期間として今期と来期の 2 つの date を考える．ある個人によって今期の砂糖という商品 500 g が初期保有として持たれているものとする．この個人は，砂糖 500 g までなら，単独の期間のうちに使いきることもできるし，もしも今期使わなければ使わなかった分をそのまま来期に持ち越すこともできるとしよう．第2節 2.1項で述べた厳密な意味での商品の定義によれば，このような商品は静学的モデルの中で「商品の保蔵」というテクノロジーをもってはじめて記述される．このようなテクノロジーを生産集合として図示せよ．さて，今期の砂糖 1 単位と来期の砂糖 1 単位の価格比が 1 ： 2 であるとし，この個人はその下で（他の種々の商品に対する需給決定の中で）今期の砂糖 200 g と来期の砂糖 300 g を消費したという．この個人の行動を，上に述べた生産集合を持つ主体（生産主体）としての行動を含めて記述するとすればどのようになるか述べよ．

Exercise 4.8 （$\star\star\star$）ある個人によって所有されている自家用車という商品について考える．この自家用車は，快適な新車のあいだの乗員輸送サービス 50000 km と古びてからの乗員輸送サービス 50000 km という 2 種類の異なるサービスを生み出すものとする．いま，単位期間として今期と来期の 2 つの date を考え，上に述べた 2 種類のサービスは単独の期間のうちに使いきることもできるし，もしも使わなければ使わなかった分をそのまま来期に持ち越すこともできるとしよう．第2節 2.1項で述べた厳密な意味での商品の定義，Debreu (1959) (Debreu, 1959) の Chapter 2 における "Use of Truck" に関する叙述等を参考にして，このような商品を保有しているということを静学的モデルの中でどのように記述されるかについて論じなさい.（ヒント：もちろん生産集合を用いて Technology として表現される．生産集合を Y_j として，その形状を述べなさい．また Y_j は凸集合になるかどうか，論じなさい.）

Exercise 4.9 （$\star\star$）Hicks の Value and Capital (Hicks, 1939) の第 3 部における最初の 2 つの章を参考にして，自分なりに考えた，ある生産主体のある期における予算制約式というものを書いてみなさいその場合何か単純化している（と自分で思う）部分があれば，それが何かということも併記しなさい．