1.3.4 集合算におけるいくつかの公式

集合の共通部分，差について

X と Y を集合とするとき，それらの和集合 $X \cup Y$ は和集合の公理 (iv) によって“集合と呼んで良い”ものであることが保証されます．同時にこのとき $X \cup Y$ の部分集合として，X と Y の**共通部分** (**intersection**) $X \cap Y$ が，“X にも Y にも属するというはっきりとした関係を満たすものの集まり”として集合と呼んでいい（公理 (vi′) より）ものであることが保証されます[32]．二つの集合に対してだけでなくもっと一般に，X を集合の集合とするとき，和集合 $\bigcup X$ の部分集合として $\bigcap X$ の存在が保証されます．便利な記法を用いれば，

$$\bigcup X = \{a \mid \text{ある } x \in X \text{ について } a \in x\},$$
$$\bigcap X = \{a \mid a \in \bigcup X \text{ かつ全ての } x \in X \text{ について } a \in x\},$$

です．特に $X \neq \emptyset$ ならば，$\bigcap X = \{a \mid \text{全ての } x \in X \text{ について } a \in x\}$ と表現できます．X および Y を集合とするとき，X と Y の**差** $X \setminus Y$ が，“X の要素のうちで Y の要素ではないものの全体”として定義されます．記号で書くと $X \setminus Y = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}$ です．特に X が話の舞台となっており，X の部分集合 Y に対して $X \setminus Y$ を考えるとき，これを全体集合 X における Y の**補集合** (**complement**) といい，特に混乱が無ければこれを $\overline{Y}$ で表すことにします．

添字による和集合並びに共通部分の表現

集合の和および共通部分は，集合を要素とする集合 X に対して $\bigcup X$，$\bigcap X$ という形で表現してきました．この表現方法は厳密かつ簡潔なものですが，あまり実用的ではありません．というのは，実際いくつかの集合の和や共通部分という概念が必要となる場合，それらの集合を要素とする集合 X

32) $X \cup Y$ の部分集合としてではなく，X の，あるいは Y の部分集合としても，もちろん $X \cap Y$ の存在は保証されますが，ここでは共通部分という概念の X および Y に対する議論の対称性を重んじて，上のように説明します．

が与えられていることはほとんどなく，たとえ無限個の場合でも X の要素が直接与えられていることがほとんどだからです．

例えば，無限個の集合を明示的に与える方法としてよく用いられるのが，“$A_i,\ i \in I$”というような表現です．これは I という集合があって，その各要素 i に対応して A_i という集合が与えられているということを表現しています．(このような I はしばしば**添字集合** (**Index Set**) と呼ばれます．) I はもちろん無限集合であっても構いません．集合の集合 X を仮に考えるとすれば，$X = \{A_i \mid i \in I\}$ となります[33]が，このとき我々は $\bigcup X$，$\bigcap X$ をそれぞれ

$$\bigcup_{i \in I} A_i, \quad \bigcap_{i \in I} A_i$$

で表します．特に $A_i,\ i \in I$ が全て，ある集合 Y の部分集合である場合に，この記法がよく用いられます[34]．その場合，$\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} A_i$ を集合と呼んで良いことは，(Y の部分集合ですから）先の重要ポイント (1.3.3) から直接正当化されます．$A_i,\ i \in I$ における I が可算集合の場合は，I のかわりに $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ などがよく用いられます．この場合 $\bigcup_{i \in N} A_i$，$\bigcap_{i \in N} A_i$ と書くよりは

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, \ \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

と表すことの方が多いようです．

ド・モルガンの公式

全体集合 U と，その二つの部分集合 X, Y に関する公式

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}, \ \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$$

はド・モルガンの公式と呼ばれます．(言うまでもなくここで $\overline{X}$ は X の U における補集合 $U \setminus X$ を表します．) 補集合ではなく差の形で書くと，W, X, Y

33) X を集合と呼んで良いことは，置換の公理 (vi) による．

34) その場合は，$\{A_i \mid i \in I\}$ が $\mathcal{P}(Y)$ の部分集合として（置換の公理 (vi) を用いずとも）いつでも“集合”と呼んでいいものになります．

を任意の集合とするとき，

$$W \setminus (X \cup Y) = (W \setminus X) \cap (W \setminus Y),$$
$$W \setminus (X \cap Y) = (W \setminus X) \cup (W \setminus Y)$$

となります．(それぞれ図を用いれば簡単に確かめることができるので，確認は各自に任せます.) これらの公式は，無限個の集合の和，共通部分についての公式として次のように一般化されます．

定理 1.3.5 (ド・モルガンの公式) W を集合とし，$X = \{X_i | i \in I\}$ を集合を要素とする集合とする．このとき，$I \neq \emptyset$ ならば，

$$W \setminus (\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} (W \setminus X_i),$$
$$W \setminus (\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} (W \setminus X_i)$$

が成立する．

証明 (1) $W \setminus (\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} (W \setminus X_i)$ を示す．"$x \in$ 左辺" $\iff$ "x は W の要素であり，かついかなる X_i の要素でもない" $\iff$ "任意の i について $x \in W \setminus X_i$" $\iff$ "$x \in$ 右辺"

(2) $W \setminus (\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} (W \setminus X_i)$ を示す．"$x \in$ 左辺" $\iff$ "x は W の要素であり，そして全ての X_i に属しているということはない" $\iff$ "x は W の要素であり，そしてある i について X_i に属さない" $\iff$ "x は，ある i について $W \setminus X_i$ を満たすようなものである" $\iff$ "$x \in$ 右辺" **証明終**.

注："二つの集合が等しい" ということを証明する場合には，上のように "$\boldsymbol{x} \in$ 左辺 $\iff$ $\boldsymbol{x} \in$ 右辺" という手順を用いるのが定石です．$\Longrightarrow$ 方向は 左辺 $\subset$ 右辺 の，$\Longleftarrow$ 方向は 左辺 $\supset$ 右辺 のそれぞれ証明になっています．上の証明で左辺および右辺をその定義に基づいて順次変形していくところの論理を，是非ともきちんとフォローしておいて下さい．これが自分でできるようになれば，集合算の様々な他の式変形も簡単にできるようになっているはずです．

集合の関数による像，逆像

f を集合 X から Y への関数とするとき，X の部分集合 A に対して $f[A]$ でもって $f(a), a \in A$ の全体からなる Y の部分集合を表すものとします．すなわち，$f: X \to Y$ が与えられたとき，

$$A \subset X \text{に対して } f[A] = \{f(a) | a \in A\} \subset Y,$$

と定めます[35]．$f[X]$ は f の値域にほかなりません．また定義によって $f[\emptyset] = \emptyset$ です．さらに B を Y の部分集合とするとき，B に対して $f^{-1}[B]$ でもって $f(x) \in B$ となるような x 全体からなる X の部分集合を表すものとしましょう．すなわち，$f: X \to Y$ が与えられたとき，

$$B \subset Y \text{に対して } f^{-1}[B] = \{a | a \in X, f(a) \in B\},$$

と定めます．特に f に対してその逆関数 f^{-1} が存在しない場合でも，$f^{-1}[\cdot]$ はきちんと定義されていることに注意して下さい．$f: X \to Y$ が定義されている限り $f[\cdot]$ も $f^{-1}[\cdot]$ もきちんと定義されています．定義から明らかに $f^{-1}[Y] = X, f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ です．

まず，$f[\cdot]$ および $f^{-1}[\cdot]$ と集合の和，共通部分についての基本的な関係式を記しておきましょう．以下，$f: X \to Y$，I は添字の集合，$A_i, i \in I$ は全て X の部分集合，$B_j, j \in J$ は全て Y の部分集合，であるものとします．

$$f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i], \tag{1.5}$$
$$f^{-1}[\bigcup_{j \in J} B_j] = \bigcup_{j \in J} f^{-1}[B_j], \tag{1.6}$$
$$f[\bigcap_{i \in I} A_i] \subset \bigcap_{i \in I} f[A_i], \tag{1.7}$$
$$f^{-1}[\bigcap_{j \in J} B_j] = \bigcap_{j \in J} f^{-1}[B_j] \tag{1.8}$$

35) これをそのまま $f(A)$ と書く書物も多いが，厳密には記号を変えるべきでしょう．ここでは関数 f から自然に導出されたものであるという気持ちで，$f[A]$ と記すことにします．

最初の二つの式は**ユニオン記号はいつでもそのまま前に出る**と覚えればよいでしょう．各式の証明は後の練習問題とします．最後に $f[\cdot]$ と $f^{-1}[\cdot]$ を合成した重要な関係式を二つあげておきます．$f: X \to Y$，$A \subset X$，$B \subset Y$ として，

$$f^{-1}[f[A]] \supset A, \tag{1.9}$$

$$f[f^{-1}[B]] \subset B, \tag{1.10}$$

上の (1.9) 式においては，f が単射の場合ならば等号が成立します．(1.10) 式の場合，B を f の値域の部分集合としてとって来さえすれば等式となります．特に f が全射の場合ならば等号が成立します．(1.9) 式は**送って戻せば広くなる**，また (1.10) 式は**戻して送れば狭くなる**，と覚えて下さい．

練習問題 1.3.1　上記 (1.5)〜(1.10) の六つの式が成立することを証明しなさい．

第 2 章　実数

本章の目的は，大学における解析学の舞台ともいうべき“実数の全体からなる集合 $\boldsymbol{R}$”というものを明確にとらえることにあります．非常に残念なことに，この舞台 $\boldsymbol{R}$ が一体何であるのかをきちんと理解した上で大学を卒業していく学生は，ごくまれです．舞台 $\boldsymbol{R}$ が何であるかを知らずして，$\boldsymbol{R}$ における解析学の様々な定理を理解せよといっても，それは無理な話でしょう．

なぜ，ほとんどの学生が実数 $\boldsymbol{R}$ の何たるかを理解できないのでしょうか．その理由は，ほとんどの学生が「実数 $\boldsymbol{R}$ とは何であるかを，完璧ではないにせよ，それほど間違った概念としてではなく知っている」からにほかなりません．前章でも“実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$”という概念を幾度か用いてきました．そのときには，高等学校までと同様に $\boldsymbol{R}$ は“循環するものもしないものも含めた無限小数の全体（整数や有限小数は後ろに 0 を並べて循環小数とみなすことにする）”と認識してきました．正確に述べるとその認識では少し不十分で，無限小数のうち $1.00000\cdots$ と $0.99999\cdots$ のようなもの，すなわちある桁から右の方へずっと 9 の繰り返すような小数と，その桁の一つ左を 1 だけ繰り上げて右へずっと 0 の続くような小数は同一視する，という約束ごとを置く必要があります．さて，仮に“0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 という十種類の数字を，$-, \cdot$（負の数を表す記号と小数点記号）とおりまぜて可算無限個