2020 年度 数理経済分析 II 教科書 Fixed Points and Economic Equilibria: 覚書

Ken Urai　　平成 32 年 8 月 12 日

p.132, Lemma 6.1.1 の証明について: 主張 (1) は使えません。しかし主張 (2) についての先の投稿のような修正も、うまくいかないようです。そこで、数学的帰納法の使い方を少し変えて、やはりダイレクトに証明し直してみました。主張 (2) は最後の方で、かなりそのままの形で使っています。

Proof: 【準備】M_0, M_1, ..., M_T を X の covering とする。その closed refinement を $C_0, C_1, ..., C_T$ とする。以下 closed refinement を covering に対して（それぞれ）cover すべき範囲と呼ぶ。

【ステップ 0 : $T = 0$ のとき】

$T = 0$ のときは、それ自体が star refinement なので、レンマの証明は終わっている。

【ステップ 1 : $T \geqq 1$ のとき】

$T \geqq 1$ のとき、$\{M_0, ..., M_{T-1}\}$ を、その cover すべき範囲 $C_0 \cup \cdots \cup C_{T-1}$ の covering と考えた場合の、レンマの証明が終わっているとする。そして、その意味での covering $\{M_0, \cdots, M_{T-1}\}$ の star refinement を $\mathfrak{N}^*_{T-1}$ とする。これに新たに C_T あるいは M_T を付け加えたものは、当然 $C_0 \cup \cdots \cup C_{T-1} \cup C_T$ 即ち X の covering である。

ここで、$\mathfrak{N}^*_{T-1}$ と C_T を合わせた covering の closed refinement をとることができるはずである（以前のものよりずっと細かいものであるが、C_T はそのままにできる）。しかし、それは $\mathfrak{N} *_{T-1}$ の要素に含まれるものに関しては $C_0 \cup \cdots \cup C_{T-1}$ との、インターセクションを取ったとしても、やはり closed covering のままである。（実際、そのインターセクションのユニオンと C_T のユニオンは X にならねばならないので。）よって、$\mathfrak{N}^*_{T-1}$ の要素に含まれる閉集合を $\{D_j | j \in J\}$ で表すとき、それらを $C_0 \cup \cdots \cup C_{T-1}$ の refinement と考えても、一般性を失わない。

さて、ここで改めて $\mathfrak{N}^*_{T-1}$ と M_t, その closed refinement としての $\{D_j | j \in J\} \cup \{C_T\}$ を元にして、$\mathfrak{M} = \{M_0, M_1, \ldots, M_T\}$ の star refinement を作ることを考える。（ここで、$\mathfrak{N}^*_{T-1}$ を要素を表す記述で書くと $\{N_j | j \in J\}$ となっているものとしておく。当然 $D_j \subset N_j$, $j \in J$ という関係とする。）

まず、$\mathfrak{M} = \{\bigcup \mathscr{N}^*_{T-1}, M_T\}$ という X の binary covering を考える。それに対して $\{\bigcup\{D_j | j \in J\}, C_T\}$ が、その closed refinement になっている。そこでこれらを用いて、X の binary covering に対する通常の star refinement 操作を考える。即ち、$\mathfrak{M}^*$ を $X \setminus C_T$, $M_T \cap \int \bigcup\{D_j | j \in J\}$, $\int C_T \cap \bigcup \mathscr{N}^*_{T-1}$, $X \setminus \bigcup\{D_j | j \in J\}$ という 4 集合による $\mathfrak{M} = \{\bigcup \mathscr{N}^*_{T-1}, M_T\}$ の star refinement と考える。

更に、今まさに作成した、$\mathfrak{M}^*$ と $\mathfrak{N}^*_{T-1}$ との間の intersection covering（それぞれ cover すべき範囲を前者は X とし後者は $\bigcup\{D_j | j \in J\}$ として異なるが）を考えると、これは $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}^*_{T-1}$ の intersection covering の、従って、特に $\mathfrak{N}^*_{T-1}$ の（cover すべき範囲を $\bigcup\{D_j | j \in J\}$ とした）star refinement である。これを $\mathfrak{N}^*$ と名付ける。この star refinement $\mathfrak{N}^*$ に、そもそも $\mathfrak{M}^*$ の要素であった $X \setminus \bigcup\{D_j | j \in J\}$ を付け加えたものを $\mathfrak{N}^*_T$ とする。

$\mathfrak{N}^*_T$ が、求める $\mathfrak{M} = \{M_0, M_1, \ldots, M_T\}$ の star refinement であることを示す。まずこれが X の covering であることは、$\mathfrak{N}*$ の cover すべき範囲が $\bigcup\{D_j | j \in J\}$ であること、そしてそれに C_T を付け加えると X の covering であることから明らかである。またこれが $\mathfrak{M}$ の star refinement でなくなる可能性は、（明らかに $\mathfrak{N}^*$ が $\mathfrak{N}^*_{T-1}$ の、従って $M_0, \ldots, M_{T-1}$ の star refinement であることから）最後に付け加えた $X \setminus \bigcup\{D_j | j \in J\}$ によって生ずる可能性だけである。しかし、最後に付け加えたものと intersection を持つとすれば、それは $\mathfrak{M}^*$ の作り方から、その（第三番目に並べられた）要素 $\int C_T \cap \bigcup \mathscr{N}^*_{T-1}$ の subset として $frmathN^*$ に入っているものに限られる。従って、そのユニオンを取っても、C_T すなわち M_T の subset となることが分かる。■