

2020年度 数理経済分析 II 教科書 Fixed Points and Economic Equilibria: 覚書

Ken Urai 平成32年8月13日

p.132, Lemma 6.1.1 の証明について (8.13 改良版) : 主張 (1) は使えません。しかし主張 (2) についての先の投稿のような修正も、うまくいかないようです。そこで、数学的帰納法の使い方を少し変えて、やはりダイレクトに証明し直してみました。主張 (2) は最後の方で、かなりそのままの形で使っています。

Proof: 【準備】 M_0, M_1, \dots, M_T を X の covering とする。その closed refinement を C_0, C_1, \dots, C_T とする。以下屢々 closed refinement を covering に対して、その cover すべき範囲と呼ぶ。

【ステップ0: $T = 0$ のとき】

$T = 0$ のときは、それ自身が star refinement なので、レンマの証明は終わっている。

【ステップ1: $T \geq 1$ のとき】

$T \geq 1$ のとき、 $\{M_0, \dots, M_{T-1}\}$ を、その cover すべき範囲 $C_0 \cup \dots \cup C_{T-1}$ の covering と考えた場合の、レンマの証明が終わっているとす。そして、その意味での covering $\{M_0, \dots, M_{T-1}\}$ の star refinement を $\mathfrak{N}_{T-1}^* = \{N_j | j \in J\}$ とする。これに新たに C_T あるいは M_T を付け加えたものは、当然 $C_0 \cup \dots \cup C_{T-1} \cup C_T$ 即ち X の covering である。

ここで、 \mathfrak{N}_{T-1}^* と C_T を合わせた covering の closed refinement を、更にとることができるはずである（以前のものより細かいものであるが、 C_T はそのままにできる）。 $\mathfrak{N}_{T-1}^* = \{N_j | j \in J\}$ の各要素に含まれる上記 refinement の閉集合の族を $\{D_j | j \in J\}$ で表す（当然 $D_j \subset N_j, j \in J$ という関係とする）。cover すべき範囲が変わっているが、依然として C_T はそのままにしてあるので、それと合わせて X を cover していることに変わりはない。

さて、ここで改めて \mathfrak{N}_{T-1}^* と M_T , その closed refinement としての $\{D_j | j \in J\} \cup \{C_T\}$ を元に、以下 $\{M_0, M_1, \dots, M_T\}$ の star refinement を作ることを考える。

まず、 $\mathfrak{M} = \{\bigcup \mathfrak{N}_{T-1}^*, M_T\}$ という X の binary covering を考える。それに対して $\{\bigcup \{D_j | j \in J\}, C_T\}$ が、その closed refinement になっている。そこでこれらを用いて、 X の binary covering に対する通常の star refinement 操作を考える。即ち、 \mathfrak{M}^* を $X \setminus C_T, M_T \cap \text{int}(\bigcup \{D_j | j \in J\}), \text{int}(C_T) \cap \bigcup \mathfrak{N}_{T-1}^*, X \setminus \bigcup \{D_j | j \in J\}$ という4集合から成る $\mathfrak{M} = \{\bigcup \mathfrak{N}_{T-1}^*, M_T\}$ の star refinement と考える。

更に、今まさに作成した、 \mathfrak{M}^* と \mathfrak{N}_{T-1}^* との間の intersection covering（それぞれ cover すべき範囲を前者は X とし後者は $\bigcup \{D_j | j \in J\}$ として異なるが）を考えると、これは \mathfrak{M} と \mathfrak{N}_{T-1}^* の intersection covering の、従って、特に \mathfrak{N}_{T-1}^* の（cover すべき範囲を $\bigcup \{D_j | j \in J\}$ とした）star refinement である。これを \mathfrak{N}^* と名付ける。この star refinement \mathfrak{N}^* に、そもそも \mathfrak{M}^* の要素であった $X \setminus \bigcup \{D_j | j \in J\}$ を付け加えたものを \mathfrak{N}_T^* とする。

\mathfrak{N}_T^* が、求める $\{M_0, M_1, \dots, M_T\}$ の star refinement であることを示す。まずこれが X の covering であることは、 \mathfrak{N}^* の cover すべき範囲が $\bigcup \{D_j | j \in J\}$ であること、そしてそれに C_T を付け加えると X の covering であることから明らかである。またこれが \mathfrak{M} の star refinement でなくなる可能性は、（明らかに \mathfrak{N}^* が \mathfrak{N}_{T-1}^* の、従って M_0, \dots, M_{T-1} の star refinement であることから）最後に付け加えた $X \setminus \bigcup \{D_j | j \in J\}$ によって生ずる可能性だけである。しかし、最後に付け加えたものと intersection を持つとすれば、それは \mathfrak{M}^* の作り方から、その（第三番目に並べられた）要素 $\text{int}(C_T) \cap \bigcup \mathfrak{N}_{T-1}^*$ の subset として \mathfrak{N}^* に入っているものに限られる。従って、そのユニオンを取っても、 C_T すなわち M_T の subset となることが分かる。 ■