■ミクロ経済学■ 6： 合理性と均衡

＊ 教科書 浦井・吉町 (2012) 第2章 個人の選択と社会の状態 p.111 〜 p.129

【1】[ゲーム論的世界設定] 個人の行動を出発点とし、社会をその総体として眺める代表的な設定として、非協力ゲーム理論の設定が挙げられる。人が何らかの行動を決定するにあたって、まずその人にとって可能な行動の全体が選択集合として与えられており、そこから選択した自らの行動と社会を構成する他者の行動の全体が一つの社会的な結果を生み、それが自分にとっての利益、効用、選好の対象になってくる、という状況を想定しよう。このような状況で各人がどのような思惑をもって、どのような行動を選択するかについての一般的議論をもって社会状態の説明を与えようとするのが**非協力ゲーム理論** non-cooperative game theory である。今日様々な経済学的問題がこの非協力ゲームの設定の下で描写されている。

厳密に書けば、戦略形の n 人非協力ゲームとは以下のようなものである。n 人の**プレイヤー player** $i = 1, \ldots, n$ および各プレイヤーの**戦略集合 strategy set** $X_1, \ldots, X_n$（個々のプレイヤーにとって可能な行動—ゲーム理論では**戦略 strategy** と呼ぶ—の選択集合）を考える。全てのプレイヤーが一つずつ自らの戦略を自らの戦略集合中から決定したとして、そのような戦略の並び $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を一つの**戦略プロファイル stratety profile** と呼ぶ。ここでの strategy profile の全体を X で表す。（数学的には X は $X_1, \ldots, X_n$ の直積と呼ばれ、記号 $\prod_{i=1}^n X_i$ などと表される。）X は可能な戦略の組のありかた全体を表す空間であるが、同時にそうした戦略の組が、それぞれ社会における一つの結果と結び付いていると（暗黙的に）想定するならば、X 上で定義されて各人の利得あるいは効用を表す関数 $F_1 : X \to R, F_2 : X \to R, \ldots, F_n : X \to R$ を考えることは自然である。これらを各プレイヤーの**利得関数 profit function** と言う。

(1) Players $i = 1, 2, \ldots, n$

(2) Strategy Sets $X_1, X_2, \ldots, X_n$

(3) Profit Functions $F_1, F_2, \ldots, F_n$

以上のリストを、**戦略形**もしくは**標準形**の n 人非協力ゲームと呼ぶ。（※**展開形**のゲーム。）

【2】[ゲームの解・ナッシュ均衡] 一つの非協力ゲームの設定が与えられたとき、しばしば暗黙的に前提されていることが2つある。一つは『全プレイヤーが上記 (1) (2) (3) のような、自らが置かれている設定そのものに関する共通の認識を持つ』(『ゲームの**数学的構造についての共通認識common knowledge**』）ということ、そして『全プレイヤーが（利得についてわざわざ損をするようなことが無いという意味で）合理的であり、またそのことを互いに知っている』(『**合理性 rationality についての共通認識 common knowledge**』）ということである。

しかしながら実は「わざわざ損をするような戦略はとらない」という程度のことを「互いに知り合っている」といったレベルであっても、そのとき我々がどのような行為をとるのかという問題について、一般的な取り扱いは極めて難しい（※ムカデゲーム・以下例1も参照)。

下図にあるのは「ムカデゲーム」という名称で知られる、**手番のある非協力ゲーム**の一例である。（上に述べた標準形に対して、**展開形**の非協力ゲームとも呼ばれる。）プレイヤーは1と2であり、○および●印はそれがいずれかの手番であることを示している（上に1とあればプレイヤー1の手番であり、2とあればプレイヤー2の手番である）。そこから矢印とともにある印「UとD」はその手番においてとることのできる2つの戦略（Up と Down）を表している。矢印の先はゲームの進行（次の手番）を表し、数字の並びが書かれているところは、ゲームの終了と2人のプレイヤーそれぞれの利得（左側の数字がプレイヤー1の取り分、右側がプレイヤー2の取り分）を表すものとする。

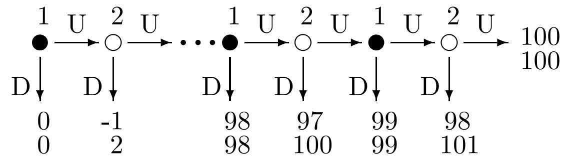

Figure 2: ムカデゲーム：非協力・展開形・手番のあるゲーム

この例は、そもそも『合理的』とはどういうことか、『正しい』とはどういうことか、といった**人間知性**の何であるかということを無条件で記述することが極めて困難であることを、教えてくれる。このような基礎的な状況においてさえ、我々は何らかの「信念」と言うべき何かを前提とせねばならないことを、教えるものである。そういう基礎的信念に基づき、全プレイヤーにおいて合理的説明のつく戦略（自明なプレイのなされ方）が1 つに決まる場合をもって（それで社会的な結果および状態が一つに描かれるという意味で）そのような戦略組 profile を非協力ゲームの**解 solution** と呼ぶ。

非協力ゲームにいつも万人の納得する solution が有るとは限らないが、ゲームの solution への手がかりとして我々はしばしば「何らかの数学的に明確な意味で安定的な戦略の組」という意味での「**均衡**」概念を用いる。最も重要な均衡概念として、**ナッシュ均衡 Nash equilibrium** があげられる。戦略 profile $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ がナッシュ均衡であるとは、各プレイヤー $i = 1, 2, \ldots, n$ について、i が単独でその戦略を x_i^* から他の $x_i \in X_i$ に変更したとても、i の利得が大きくなることはない、即ち

$$F_i(x_1^*, \ldots, x_i, \ldots, x_n^*) \leqq F_i(x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*)$$

ということが、全ての $i \in I$ および $x_i \in X_i$ に関して成り立つことをいう。

【3】戦略形非協力2 人ゲームのナッシュ均衡の例（c.f. Kreps 1990）

(1-1) iterated strict dominance（※ 右図混合戦略）

		Player 2		
		t1	t2	t3
Player 1	s1	4, 0	1, 5	6, 4
	s2	5, 3	6, 0	$-3, -1$

		Player 2		
		t1	t2	t3
Player 1	s1	1, 8	2, 0	1, 3
	s2	0, 0	1, 8	100, 3.5

※ **混合戦略 mixed strategy**：純粋戦略の集合を $X_2 = \{t_1, t_2, t_3\}$ とするとき、そのいずれの戦略をとるかということを**確率変数**（値 t_1, t_2, t_3 いずれかの目がでる仮想的なサイコロを振る行為）ととらえ、その**確率分布** σ を指定する（各目の出方の確率を指定する：$\sigma(\{t_1\}) \geqq 0, \sigma(\{t_2\}) \geqq 0, \sigma(\{t_3\}) \geqq 0, \sum_{k=1}^{3} \sigma(\{t_k\}) = 1$）ことをもって1 つの戦略とする。このような戦略を混合戦略という。（X_2 上に1 つの**確率測度** — X_2 の部分集合 $\{t_1, t_2\}$ などに、それが起こる確率を与えるしくみ — を定義すること、と言いかえても良い。）戦略として混合戦略を許す場合、利得もその混合戦略の下での**期待値**（一つの混合戦略 σ が、各純粋戦略 t_k に対してそれが起こる確率 $\sigma(\{t_k\})$ を与えるので、全ての結果に対する確率を計算できる）で再定義する。

(1-2) 以下のゲームのナッシュ均衡について（※ 囚人のジレンマと検事の弟）

		囚人 2	
		not confess	confess
囚人 1	not confess	5, 5	$-3, 8$
	confess	$8, -3$	0, 0

		囚人 2	
		not confess	confess
検事の弟	not confess	10, 5	$-3, 8$
	confess	$8, -3$	0, 0

※ 仮に DA's Brother ゲームに置ける player 2 が協調解を狙って not confess を選べば（ つまり自分の読みが共通認識となることすら，あらかじめ読んでしまったとすれば，player 2 は not confess を合理的に選び得るので）(not confess, not confess) は play され得るのではないか…。もちろんそれは Nash でない。だが大事なことは，これを支える背後の想定がplayer 2 の心ひとつ（ 人間として player 1 がそれを理解できるし、そうなればそういった「 心の状況を所与」とした天下り的な意味での均衡だということである。天下り的な状況は、複数あるときの Nash 均衡とて同じことであり、均衡と呼ぶことへの批判にはあたらない。）

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	1, 1	0, 0
	s2	0, 0	10, 10

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	0, 0	9, 10
	s2	10, 9	0, 0

※ Nash 均衡が複数存在している場合。（ いずれの Nash 均衡も、天下り的な意味でしか、その「 ゲームの解」としての可能性を主張できない。）

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	10, 0	0, 10
	s2	0, 10	10, 0

		Player 2					
		t1	t2-0	t2-1	t2-2	t2-3	⋯
Player 1	s1	$1, 1$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	⋯
	s2-0	$0, 0$	$10, 10$	$9, 11$	$9, 11$	$9, 11$	⋯
	s2-1	$0, 0$	$11, 9$	$10, 10$	$9, 11$	$9, 11$	⋯
	s2-2	$0, 0$	$11, 9$	$11, 9$	$10, 10$	$9, 11$	⋯
	s2-3	$0, 0$	$11, 9$	$11, 9$	$11, 9$	$10, 10$	$9, 11$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$11, 9$	⋱

※ 左は、Nash 均衡が（ 純粋戦略としては）存在しない場合。（ ただし、混合戦略の下での Nash 均衡は、有限人、有限戦略であれば、必ず存在する。）右は、唯一の Nash 均衡が、恐らく Play されることが無い（ 解とは言えない）例。

※ Focal Point:
Shimbashi Shinagawa Shibuya Shinjyuku
Sakuranomiya Tennoji Tsuruhashi Tenma

【 4 】vNM 期待効用表現

$s_1, \ldots, s_k$ という k 種類の異なる世界の状態 (state) が存在し、実際にはそのうちの一つだけが成立するその全体を S という集合で表すことにしよう。S 上の**確率変数 (random variable)** x とは、S 上で定義されて、何らかの値 $x(s)$ を取る関数であるが、そのような値の集合（ x の値域）を C で表し、**結果 (outcome)** の集合と呼ぶ。$U : C \to R$ を利得関数、あるいは**フォン・ノイマン = モルゲンシュテルン効用関数**と呼ぶ。[14]

[14] 一般均衡理論では一時的一般均衡などの動学的枠組みでしばしば用いられる。例えば Grandmont (1977; pp.539–540) を見よ。

S 上で定義され C に値をとる確率変数 x の全体を X とし、S 上の確率測度を σ とするとき、上述した利得（フォン・ノイマン=モルゲンシュテルン効用）に基づく X 上の効用水準を（期待値と同様の考え方でもって）

$$u(\sigma, x) = \sum_{t=1}^{k} \sigma(s_t) U(x(s_t))$$

で定義したものを**フォン・ノイマン=モルゲンシュテルン期待効用関数 (expected utility function)** と呼ぶ。[15]

期待効用関数は X 上の点、すなわち将来あるいは現在の不確実な状況における選択、意思決定の定式化においてしばしば用いられるものであるが、実際には上述したような「フォンノイマン・モルゲンシュテルン効用の存在」と、それに対する確率論的な「期待値」として、x に与えられる選好が表現され**なければならない**という根拠は何処にもない。実際、現実世界における意思決定（直接的にそういった確率変数 $x \in X$ に対して行動上与えられる）には、しばしばそうした（期待効用という）概念と相容れない反例も見出される。[16]

期待効用という考え方が成立する前提を見る。σ を有限集合 S 上の確率測度とすると、$x \in X$ は C 上の確率測度を $\sigma(x^{-1}(A))$ として定義できる。C 上の確率測度全体の集合を P として、P の要素に対して選好を表す関係 $\succ$ が与えられており、以下のことが成り立っているとしよう。

公理 1: P 上の $\succ$ は**非対称性 (asymmetricity)** および**否定についての推移性 (negative transitivity)** を満たす。[17]

公理 2: 任意の $p \succ q$ なる $p, q \in P$ および、任意の $\alpha \in (0,1)$ ならびに $r \in P$ に対して、$\alpha p + (1-\alpha) r \succ \alpha q + (1-\alpha) r$ が成立する（**代替公理 (substitution axiom)**）。

公理 3: $p \succ q \succ r$ なる p, q, r について、ある確率測度 $\alpha \in (0,1)$ と $\beta \in (0,1)$ が存在して、$\alpha p + (1-\alpha) r \succ q \succ \beta p + (1-\beta) r$ である（**アルキメデス公理 (Archimedean axiom)**）。

公理1-3が満足されるとき、C 上で定義されるフォン・ノイマン効用関数を $U : C \to R$ をもって、$\succ$ を期待効用を用いて次のように**期待効用関数表現**することができる。

$$p \succ q \Longleftrightarrow u(p) = \sum_{c \in C} U(c) p(c) > u(q) = \sum_{c \in C} U(c) q(c)$$

（例えば Kreps (1990; p.76, Proposition 3.1) を見よ。）すなわち、c が $x(s_t)$, $p(c) = \sum_{x(s_t)=c} \sigma(s_t)$ であれば、

$$u(\sigma, x) = \sum_{t=1}^{k} \sigma(s_t) U(x(s_t))$$

として、そのような選好 $\succ$ をフォン・ノイマン= モルゲンシュテルン効用関数を用いて表現できる。

REFERENCES

Debreu, G. (1952): "A social equilibrium existence theorem," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. 38*, 886–893. Reprinted as Chapter 2 in G. Debreu, *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Grandmont, J. M. (1977): "Temporary general equilibrium theory," *Econometrica 45*(3), 535–572.

Kreps, D. M. (1990): *A Course in Microeconomic Theory.* Princeton University Press, New Jersey.

浦井 憲・ 吉町昭彦 (2012):『ミクロ経済学 — 静学的一般均衡理論からの出発』ミネルヴァ書房, Kyoto.

[15] $U : C \to R$ に基づいて、状態 s_t が生じた場合の x の効用を $u^t(x) = U(x(s_t))$ と定義（$t = 1, 2, \ldots, k$）して、これをフォン・ノイマン=モルゲンシュテルン効用と呼ぶこともある。

[16] Kreps (1990; Section 3.5) などを見よ。1[50000] と 0.8[80000], 0.25[50000] と 0.2[80000] (Allais paradox)。※ Framing

[17] 非対称性とは、任意の $p, q \in X$ に対して、$(p \succ q) \Rightarrow \neg(q \succ p)$ を満たすことをいう。また、否定についての推移性とは、$\neg p \succ q$ を $p \precsim q$ と書いた場合の $\precsim$ についての推移性のことである。