■ミクロ経済学■ 3： 均衡および合理性

【1】[ゲーム論的世界設定] 個人の行動を出発点とし、社会をその総体として眺める代表的な設定として、非協力ゲーム理論の設定が挙げられる。人が何らかの行動を決定するにあたって、まずその人にとって可能な行動の全体が選択集合として与えられており、そこから選択した自らの行動と社会を構成する他者の行動の全体が一つの社会的な結果を生み、それが自分にとっての利益、効用、選好の対象になってくる、という状況を想定しよう。このような状況で各人がどのような思惑をもって、どのような行動を選択するかについての一般的議論をもって社会状態の説明を与えようとするのが**非協力ゲーム理論** non-cooperative game theory である。今日様々な経済学的問題がこの非協力ゲームの設定の下で描写されている。

厳密に書けば、戦略形の n 人非協力ゲームとは以下のようなものである。n 人の**プレイヤー player** $i = 1, \ldots, n$ および各プレイヤーの**戦略集合 strategy set** $X_1, \ldots, X_n$ （個々のプレイヤーにとって可能な行動—ゲーム理論では**戦略 strategy** と呼ぶ—の選択集合）を考える。全てのプレイヤーが一つずつ自らの戦略を自らの戦略集合中から決定したとして、そのような戦略の並び $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を一つの**戦略プロファイル stratety profile** と呼ぶ。ここでの strategy profile の全体を X で表す。（数学的には X は $X_1, \ldots, X_n$ の直積と呼ばれ、記号 $\prod_{i=1}^{n} X_i$ などと表される。）X は可能な戦略の組のありかた全体を表す空間であるが、同時にそうした戦略の組が、それぞれ社会における一つの結果と結び付いていると（暗黙的に）想定するならば、X 上で定義されて各人の利得あるいは効用を表す関数 $F_1 : X \to R$, $F_2 : X \to R, \ldots, F_n : X \to R$ を考えることは自然である。これらを各プレイヤーの**利得関数 profit function** と言う。

(1) Players $i = 1, 2, \ldots, n$

(2) Strategy Sets $X_1, X_2, \ldots, X_n$

(3) Profit Functions $F_1, F_2, \ldots, F_n$

以上のリストを、**戦略形**もしくは**標準形**の n 人非協力ゲームと呼ぶ。（※**展開形**のゲーム。）

【2】[ゲームの解・ナッシュ均衡] 一つの非協力ゲームの設定が与えられたとき、しばしば暗黙的に前提されていることが２つある。一つは『全プレイヤーが上記 (1) (2) (3) のような、自らが置かれている設定そのものに関する共通の認識を持つ』(『ゲームの**数学的構造についての共通認識common knowledge**』）ということ、そして『全プレイヤーが（利得についてわざわざ損をするようなことが無いという意味で）合理的であり、またそのことを互いに知っている』(『**合理性 rationality についての共通認識 common knowledge**』）ということである。

しかしながら実は「わざわざ損をするような戦略はとらない」という程度のことを互いに知り合っているといったレベルであっても、そのとき我々がどのような行為をとるのかという問題について、一般的な取り扱いは極めて難しい（※ムカデゲーム・以下例 1 も参照)。ましてそもそも『合理的』とはどういうことか、『正しい』とはどういうことか、といった人間知性を深くとらえることは、極めて困難であることを、我々に教えてくれる。それはまさに『認識論的価値』に相当する問題であり、このような基礎的な問題をとらえる場合においてさえ、我々は何らかの「信念」と言うべき何かを、我々が「前提」とせねばならないことを、教えるものである。そういう基礎的信念に基づき、全プレイヤーにおいて合理的説明のつく戦略（自明なプレイのなされ方）が 1 つに決まる場合をもって（それで社会的な結果および状態が一つに描かれるという意味で）そのような戦略 profile を非協力ゲームの**解 solution** と呼ぶ。

非協力ゲームにいつも万人の納得する solution が有るとは限らないが、ゲームの solution への手がかりとして我々はしばしば「何らかの数学的に明確な意味で安定的な戦略の組」という意味での「**均衡**」概念を用いる。最も重要な均衡概念として、**ナッシュ均衡 Nash equilibrium** があげられる。戦略 profile $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ が

ナッシュ均衡であるとは、各プレイヤー $i = 1, 2, \ldots, n$ について、i が単独でその戦略を x_i^* から他の $x_i \in X_i$ に変更したとても、i の利得が大きくなることはない、即ち

$$F_i(x_1^*, \ldots, x_i, \ldots, x_n^*) \leqq F_i(x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*)$$

ということが、全ての $i \in I$ および $x_i \in X_i$ に関して成り立つことをいう。

（１） 戦略形非協力２人ゲームの例（c.f. pcciteKreps1990）

(1-1) iterated strict dominance （※ 右図混合戦略）

		Player 2		
		t1	t2	t3
Player 1	s1	4, 0	1, 5	6, 4
	s2	5, 3	6, 0	$-3, -1$

		Player 2		
		t1	t2	t3
Player 1	s1	1, 8	2, 0	1, 3
	s2	0, 0	1, 8	100, 3.5

※ **混合戦略 mixed strategy**：純粋戦略の集合を $X_2 = \{t_1, t_2, t_3\}$ とするとき、そのいずれの戦略をとるかということを**確率変数**（値 t_1, t_2, t_3 いずれかの目がでる仮想的なサイコロを振る行為）ととらえ、その**確率分布** σ を指定する（各目の出方の確率を指定する：$\sigma(\{t_1\}) \geqq 0, \sigma(\{t_2\}) \geqq 0, \sigma(\{t_3\}) \geqq 0, \sum_{k=1}^{3} \sigma(\{t_k\}) = 1$）ことをもって１つの戦略とする。このような戦略を混合戦略という。（X_2 上に１つの**確率測度** — X_2 の部分集合 $\{t_1, t_2\}$ などに、それが起こる確率を与えるしくみ — を定義すること、と言いかえても良い。）戦略として混合戦略を許す場合、利得もその混合戦略の下での**期待値**（一つの混合戦略 σ が、各純粋戦略 t_k に対してそれが起こる確率 $\sigma(\{t_k\})$ を与えるので、全ての結果に対する確率を計算できる）で再定義する。

(1-2) 以下のゲームのナッシュ均衡について

		囚人 2	
		not confess	confess
囚人 1	not confess	5, 5	$-3, 8$
	confess	$8, -3$	0, 0

		囚人 2	
		not confess	confess
検事の弟	not confess	10, 5	$-3, 8$
	confess	$8, -3$	0, 0

※ 仮に DA's Brother ゲームに置ける player 2 が協調解を狙って not confess を選べば（つまり自分の読みが共通認識となることすら，あらかじめ読んでしまったとすれば，player 2 は not confess を合理的に選び得るので）(not confess, not confess) は play され得るのではないか…。もちろんそれは Nash でない。だが大事なことは，これを支える背後の想定が player 2 の心ひとつ（人間として player 1 がそれを理解できるし、そうなればそういった「心の状況を所与」とした天下り的な意味での均衡だということである。天下り的な状況は、複数あるときの Nash 均衡とて同じことであり、均衡と呼ぶことへの批判にはあたらない。）

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	1, 1	0, 0
	s2	0, 0	10, 10

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	0, 0	9, 10
	s2	10, 9	0, 0

※ Nash 均衡が複数存在している場合。（いずれの Nash 均衡も、天下り的な意味でしか、その「ゲームの解」としての可能性を主張できない。）

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	10, 0	0, 10
	s2	0, 10	10, 0

		Player 2					
		t1	t2-0	t2-1	t2-2	t2-3	$\cdots$
Player 1	s1	$1,1$	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$0,0$	$\cdots$
	s2-0	$0,0$	$10,10$	$9,11$	$9,11$	$9,11$	$\cdots$
	s2-1	$0,0$	$11,9$	$10,10$	$9,11$	$9,11$	$\cdots$
	s2-2	$0,0$	$11,9$	$11,9$	$10,10$	$9,11$	$\cdots$
	s2-3	$0,0$	$11,9$	$11,9$	$11,9$	$10,10$	$9,11$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$11,9$	$\ddots$

※ 左は、Nash 均衡が（純粋戦略としては）存在しない場合。（ただし、混合戦略の下での Nash 均衡は、有限人、有限戦略であれば、必ず存在する。）右は、唯一の Nash 均衡が、恐らく Play されることが無い（解とは言えない）例。

【３】[抽象経済] Abstract Economy: 経済システムをゲーム論的設定に基づいて定式化したものであり、cciteDebreu1952 が今日的な均衡の存在問題を解決するにあたって、その基礎とした社会モデル。価格調整者を含めたワルラス的一般均衡の枠組を、制約対応の入ったゲーム論的設定における一般化されたナッシュ均衡として描いた。

(Players)　価格調整者　生産者 $j = 1, \ldots, n$　消費者 $i = 1, \ldots, m$

(Strategy Sets)　価格集合　生産集合　消費集合

(Constraint Correspondences)　価格が与えられた下での各消費者の予算制約

(Profits)　**超過需要の価値額最大化　利潤最大化　効用最大化**

上記設定において、『実現可能な戦略の組 feasible strategy profile』とは、全てのプレイヤーにおいて戦略集合に入っており、かつ消費主体においては予算制約対応も満たしているような戦略の組を言う。実現可能な戦略 profile であり、かつ各プレイヤーにおいて他の全てのプレイヤーの戦略を所与として、制約対応も含めた意味で自らのとり得る戦略の中で現状のものより良い戦略が存在しないようなものを、抽象経済における均衡（一般化されたナッシュ均衡）と言う。

定義から明らかに、抽象経済の均衡（一般化されたナッシュ均衡）においては、次のことが成り立つ。

価格調整者によって選ばれた価格の下で

(1) 各生産者において**利潤最大化**

(2) 各消費者において**効用最大化**

全消費者の戦略と全生産者の戦略の下で

(3) 価格調整者は**価格を現状から変更する必要がない**

ここで、最後の (3) は価格調整者の profit がいわば「超過需要がある商品の価格を上げ、超過供給のある商品の価格を下げる」という行為の数学的定式化であることを考えれば、すなわち超過需要が 0 であることを表す。（★価格集合については後述する。厳密な議論のためには**ワルラス法則**が必要である。これも後述。）これがすなわち**経済学的均衡 economic equilibrium** である。

★（数学的補足と発展的課題）

（１）価格集合：上述の価格調整者が設定しようとする『価格 p』とは、単一の商品の単一の価格ではなく、経済に存在する全商品の『全価格システム』、すなわち、社会に存在する全商品の数を ℓ とすれば $p=(p_1,\ldots,p_\ell)$ のような形のベクトルである。価格集合 P（すなわち価格調整者の戦略集合）は、通常、社会の全商品の数を ℓ 種類とすると

$$P=\{(p_1,\ldots,p_\ell)|\, p_1 \geqq 0,\ldots,p_\ell \geqq 0, \sum_{k=1}^{\ell} p_k = 1\}$$

のような R^ℓ の部分集合（$\ell-1$ 次元標準単体）にとられることが多い。（※ 負の価格に付いては考えなくて良いのか。※ なぜ、総和を 1 と規準化 normalize して良いのか。）

（２）ゲームのナッシュ均衡と、抽象経済の均衡の最も大きな違いを、以下のような観点からとらえてみよう。

価格調整者を除くすべてのプレイヤーが、価格（すなわち価格調整者の戦略）を所与としているとき、**各消費者のとるべき最適な戦略は、他の消費者がとる戦略が何であるかということと関係がない。**通常のゲームにおいては、いずれのプレイヤーに関しても、そのプレイヤーの戦略が変われば、他のプレイヤーの利得も変化し得る。抽象経済の設定では、少なくとも消費者間においてこのことが成立していない。すなわち、経済というメカニズムは、価格さえ所与（Price Taking Behaviors）とするならば、各消費主体が、他の消費主体の行動決定から独立して、自由に自己の最適行動を決めることができるメカニズムなのである。

【４】［資源配分とパレート最適］消費主体 $i=1,2,\ldots,m$ およびその消費集合 $X_1,X_2,\ldots,X_m$ を考える。各消費者について、それぞれの消費集合から消費計画（行為）を一つずつ選択して並べたもの $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ を、消費主体 $i=1,\ldots,m$ がつくる社会における一つの**資源配分 allocation** という。$I=\{1,2,\ldots,m\}$ がつくる社会において、社会全体の生産可能性がやはり集合 Y（社会全体の生産可能性集合 production possibility set）として与えられているものとしよう。allocation $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ という消費計画の総計 $\sum_{i=1}^m x_i$ が、この社会全体の生産可能性集合に入る $\sum_{i=1}^m x_i \in Y$ とき、allocation $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ は**実現可能**（feasible もしくは attainable）であると言われる。

各消費集合上に、２項関係としての preference $\precsim_1,\precsim_2,\ldots,\precsim_m$ が与えられているものとする。各 $i\in I$ について「$x \precsim_i y$ でありかつ $y \precsim_i x$ でない」ことを「$x \prec_i y$」で表すことにする。allocation $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ が**パレート最適** Pareto Optimal であるとは

(1) $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ は feasible であり

(2) 他の feasible な資源配分 $(y_{1,2},\ldots,y_m)$ で「全ての $i\in I$ について $x_i \precsim_i y_i$ かつ少なくとも一人の i について $x_i \prec_i y_i$」を満たすようなものが存在しない

ことをいう。

【５】［経済のコア資源配分］上と全く同じ設定に加えて、社会を構成する I の部分集合 $J\subset I$ が、いわばグループ J だけで新たな社会（J 社会）を構成するとしたとき、その J 社会の生産可能性集合を Y_J で表す。元の I によって構成される社会の allocation $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ に対して、J によって構成される J 社会の allocation $(\cdots,y_j,\cdots)_{j\in J}$ が

(3) $\sum_{j\in J} y_j \in Y_J$ すなわち $(\cdots,y_j,\cdots)$ の $j\in J$ に関する総計は J 社会で feasible であり、「全ての $j\in J$ について $x_j \precsim_j y_j$ かつ少なくとも一人の j について $x_j \prec_j y_j$」

を満たすならば、グループ（専門用語でこれを**結託 coalition** と言う）J が allocation $(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ を**ブロック block** する（J に関しては**改善 improve on** する）と言う。

パレート最適な資源配分とは、**最大結託 J によってブロック（改善）されないような資源配分である**、と言い換えることもできる。その社会において可能ないかなる結託 $J\subset I$ によってもブロックされないような資源配分を**コア資源配分 core allocation** とよぶ。

【６】［経済の一般均衡資源配分］社会における行動が「与えられた価格」を元にして決定されている状況およびその下での資源配分状態について考える。社会全体の生産可能性集合の中で、与えられた価格 p の下で最もその価値

が高い社会的生産（産出物の価値から投入物の価値を引いた額（社会的利潤 $W(p)$）を最も高くするような**社会的に効率的 effective な生産**）が行われるものとする。更に社会を構成するメンバー $I=\{1,2,\ldots,m\}$ の各 $i\in I$ に対して、その下での社会的利潤の分配額 $W_1(p),W_2(p),\ldots,W_m(p)$（$W_1(p)+W_2(p)+\cdots+W_m(p)=W(p)$）が明確に定まっているものとする。このとき、この社会（経済 $((X_i,W_i)_{i\in I},Y)$）の**一般均衡資源配分**（市場均衡資源配分・ワルラス資源配分）とは、allocation $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_m^*)$ であり：

(1) 価格 p の下で社会的利潤を最大にする（$W(p)$ という額を与える）社会的生産 $y^*\in Y$ は $\sum_{i\in I}x_i^*=y^*$ （**市場均衡条件**）を満たす。

(2) 各 $i\in I$ について、x_i^* は消費集合 X_i の要素のうち、価格 p および資産 $W_i(p)$ の下での予算制約を満たす中で $\precsim_i$ maximal な消費計画である（各消費者の**主体的均衡条件**）。

を満たすようなものである。p は**市場均衡価格**である。

★（数学的補足と発展的課題）

（１）Edgeworth Box Diagram を用いて、２人２財単純交換ケースにおけるコア資源配分、一般均衡資源配分がそれぞれどのようなものになるか、図をもって確認せよ。

（２）Edgeworth Box Diagram（講義で解説）を用いて以下のことを確かめよ。

(2-1) 消費者 A および消費者 B が、ともにまず商品１の数量の大小を優先させ、次に商品２の数量の大小を優先させるような辞書式選好を持っているとき、パレート最適な資源配分はどのようなものか。

(2-2) 消費者 A が上述のような選好を持ち、消費者 B は効用関数 $u(x,y)=x+y$ で表される（x は商品１の、y は商品２のそれぞれ数量を表す）ような選好を持つとき、パレート最適な資源配分はどのようなものになるか。もし B の効用関数が $u(x,y)=y$ ならどうか。

(2-3) 消費者 A の選好が効用関数 $u(x,y)=\min\{x,y\}$ で表されており、B の選好が $u(x,y)=xy$ で表されるとき、契約曲線（パレート最適な資源配分状態部分を表す曲線）はどのようなものになるか。

● 市場均衡資源配分 $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_m^*)$ は、以下の条件が満たされている限り、パレート最適である。

[条件 3-1] 市場均衡価格 p の下、各消費者 $i\in I$ について、より安価な消費計画であってかつ現状と無差別であるようなものが無い（例えば無差別曲線に厚みがあるようなことが無い）。

証明：資源配分 $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_m^*)$ がパレート最適でないと仮定して矛盾を導く。ある実現可能な資源配分 $(z_1^*,z_2^*,\ldots,z_m^*)$ で、全ての $i\in I$ について $z_i^*\precsim_i z_i^*$ かつ少なくとも一人の j について $x_j^*\prec_j z_j^*$ であるとする。全ての人で価格 p の下での効用最大化が行われているという条件から、上記 j に関して次のことが言える。

(a) p の下での z_j の価値は $W_j(p)$ に比べて**厳密に大きい**。

また、条件 [3-1] から、全ての $i\in I$ について

(b) p の下での z_i の価値は $W_i(p)$ に比べて**大きいかまたは等しい**。

したがって (a) と (b) より、$\sum_{i\in I}z_i^*$ の価値は $W(p)=W_1(p)+W_2(p)+\cdots W_m(p)$ より大きい。すなわち $\sum_{i\in I}z_i^*=z^*\in Y$ の価値が $W(p)$ より大きい事になるが、これは $W(p)$ が p の下で最も大きい社会的利潤（社会的生産計画の価値）を与える大きさであることに矛盾する。 **（証明終）**

＊ 上記（３）によって主張される内容「競争均衡はパレート最適である」を、**厚生経済学の第一基本定理**と言う。生産を考えない経済（純粋交換経済）においては、これより一層強い命題として「競争均衡資源配分はコア資源配分である」が成立する。証明方法は上とほとんど同様である。