6 静学的一般均衡理論の概観

6.1 一般均衡の定義

生産主体 Y_j, $j = 1, \cdots, n$.

価格 $p \in \Delta \subset R^\ell$.

利潤関数 $\pi_j(p) = \sup\{p \cdot y | \, y \in Y_j\}$.

供給対応 $\eta_j(p) = \{y \in Y_j | \, p \cdot y = \pi(p)\}$

消費主体 $(X_i, \precsim_i, \omega_i, (\theta_{ij})_{j=1}^n)$, $i = 1, \cdots, m$.

価格 $p \in \Delta$（Δ は上の Δ と共通）.

資産関数 $W(p) = p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij}\pi_j(p)$.

需要対応 $\xi_i(p) = \{x^* \in X_i | \, \forall x \in X_i, ((p \cdot x \leq W_i(p)) \to (x \precsim x^*))\}$.

上で $\Delta \subset R^\ell$ は，$\forall p \in \Delta$, について $\eta_j(p) \neq \emptyset$ なるように定義されているものとする.（定理 4.6，定義 4.15 の直後の記述等，参照せよ.）

以上の設定で，ある価格 p^* の下，総供給と総需要の大きさが等しくなる状態を一般均衡（競争均衡）と呼ぶ.（しばしば総供給の大きさが総需要の大きさを上回る状態を Free Disposal 均衡と呼ぶ.）

Definition 6.1 **（一般均衡）**ある価格 p^* が存在して，その下での各主体の行動 y_j^*, $j = 1, \cdots, n$, x_i^*, $i = 1, \cdots, m$ が最適化 $y_j^* \in \eta_j(p^*)$，$j = 1, \cdots, n$, $x_i^* \in \xi_i(p^*)$, $i = 1, \cdots, m$ されており，$\sum_{i=1}^m \xi_i(p^*) = \sum_{i=1}^m \omega_i + \sum_{j=1}^n y_j^*$ となるとき，p^* を**一般均衡価格**，組 $(x_1^*, \cdots, x_m^*, y_1^*, \cdots, y_n^*)$ を**一般均衡状態**と呼ぶ.（しばしば $\sum_{i=1}^m \xi_i(p^*) \leq \sum_{i=1}^m \omega_i + \sum_{j=1}^n y_j^*$ が満たされる場合を Free Disposal 一般均衡と呼ぶ.）

以下，$I = \{1, \cdots, m\}$ および $J = \{1, \cdots, n\}$ でもって，消費主体および生産主体の Index Set とする．また「一般均衡」という言葉の代わりに「競争均衡」という言葉を用いることも多い.

6.2 主要概念

6.2.1 Attainable Set

ある経済 $\mathbf{\mathcal{E}}$ において，一つの "**社会状態 (social outcome)** " とは，その経済を構成する全ての主体の全ての商品にわたる消費量ならびに投入産出量のリスト $((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J})$ を指す．実現可能な社会状態の全体からなる集合を，その経済の **Attainable Set** と呼び，以下では（ある一つの経済 $\mathcal{E}$ を固定して述べているものとして）これを A で表す．厳密に表現すると，次のようになる.

$$A = \{((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}) \in \prod_{i\in I} X_i \times \prod_{j\in J} Y_j | \sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in J} y_j + \sum_{i\in I} \omega_i\} \tag{72}$$

実現可能な社会状態 $((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}) \in A$ において，消費主体 i の消費量を表す x_i は，その消費主体がその社会において最終的に受け取るもの（その消費主体への資源配分）と言ってもよいであろう．この意味で，しばしば上のような x_i を**消費主体 i への資源配分 (Allocation for consumer i)** と呼んだり，$(x_i)_{i\in I}$ を**経済 $\mathcal{E}$ における一つの資源配分状態 (Allocation for Economy $\mathcal{E}$)** と呼んだりする．経済 $\mathbf{\mathcal{E}}$ における**実現可**

能な資源配分状態（attainable allocation, feasible allocation）の全体 F は，先の Attainable Set A から次のように表される．

$$F = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i | \exists (y_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} Y_j, ((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}) \in A\} \tag{73}$$

一方 $((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}) \in A$ における $(y_j)_{j\in J}$ は，その和 $y = \sum_{j\in J} y_j$ をとることによって，経済 $\mathcal{E}$ 全体として，何を生産することが可能であるかということを表す．そのような y の全体を**生産可能性集合 (production possibility set)** と呼び，Y で表す．厳密に表すと，次のようになる．

$$Y = \{\sum_{j\in J} y_j | \exists (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i, ((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}) \in A\} \tag{74}$$

6.2.2 Walras' Law

$y_j(p)$ を，価格 p のもとでの企業 j の主体的均衡とし，$x_i(p)$ を，同じ価格 p のもとでの消費主体 i の主体的均衡とする．各消費主体の資産関数 $W_i(p)$ が標準的な $p\cdot\omega_i + \sum_{j\in J}\theta_{ij} p\cdot y_j(p)$ という形であったとすると，全ての消費主体の予算制約式を足しあわせることによって次の式が成立する．

$$\sum_{i\in I} p\cdot x_i(p) \leq \sum_{i\in I} p\cdot\omega_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\theta_{ij} p\cdot y_j(p) \tag{75}$$

右辺の第 2 項は $\leq \sum_{j\in J} p\cdot y_j(p)$ だから，代入した後全体を左辺に移項して p でまとめると，

$$p\cdot(\sum_{i\in I} x_i(p) - \sum_{i\in I}\omega_i - \sum_{j\in J} y_j(p)) \leq 0 \tag{76}$$

を得る．式 (76) は，人々が予算の範囲内で行動する限りにおいて，超過需要の価値額は必ず負または 0 になることを表しており，広義のワルラス法則と呼ばれる．

6.3 最適性

経済 $\mathcal{E}$ における実現可能な資源配分状態の全体 F 上の関係 $\precsim$ を，各 $x = (x_i)_{i\in I}, x' = (x'_i)_{i\in I} \in F$ について，$(x \precsim x') \iff (\forall i \in I, x_i \precsim_i x'_i)$ と定義する．明らかに，$\precsim$ は F 上の前順序である（練習問題）．

Definition 6.2 （パレート最適）経済 $\mathcal{E}$ における実現可能な資源配分状態 $(x^*_i)_{i\in I} \in F$ が**パレート最適 (Pareto-Oprimal)** であるとは，$(x_i)_{i\in I} \in F$ で，$(x^*_i)_{i\in I} \precsim (x_i)_{i\in I}$ かつ少なくとも一つの $i \in I$ について $x_i \succ_i x^*_i$ となるようなものが存在しない，ことをいう．しばしば $((x^*_i)_{i\in I}, (y^*_j)_{j\in J}) \in A$ に対して，パレート最適という言葉が用いられることもある．

Assumption 6.3 $\forall i \in I$ について，x が X_i における選好の飽和点でないならば，i の選好は x において局所非飽和である．[36]

Theorem 6.4 （厚生経済学の第一基本定理）仮定 6.3 の下で，競争均衡状態 $((x^*_i)_{i\in I}, (y^*_j)_{j\in J})$ は，もしも $\forall i \in I$ について x^*_i が選好の飽和点でないとすると，パレート最適である．

[36] 選好が non-ordered（必ずしも ordered でない）場合においても，こういった基本定理のほとんどは成立する．補論 3 でまとめて取り扱う．

Proof： $((x_i^*)_{i\in I},(y_j^*)_{j\in J})$ に関する競争均衡価格を p^* とする．結論を否定（競争均衡状態がパレート最適でないと）すると，ある $((x_i')_{i\in I},(y_j')_{j\in J})\in A$ が存在して，$\forall i\in I,\, x_i^*\precsim_i x_i'$ かつ，ある $h\in I$ について，$x_h\succ_h x_h^*$ となる．$x_h\in X_h$ であるから，価格 p^* の下での消費主体の行動（ $\xi_h(p^*)$ ）の定義から直ちに，

$$p^*\cdot x_h^* < p^*\cdot x_h. \tag{77}$$

また $\forall i\in I$ について x_i^* は選好の飽和点でないから（推移性より）任意の $x_i\in X_i,\, x_i\precsim_i x_i^*$ も選好の飽和点ではなく，従って仮定 6.3 により局所非飽和である．特にこのとき $x_i\sim_i x_i^*,\, x_i\in X_i$ は X_i の開集合 $\{x\in X_i|\, p^*\cdot x<p^*\cdot\omega_i+\sum_{j\in J}\theta_{ij}p^*\cdot y_j^*\}$ に属さない．なぜなら，もしも属するならば，局所非飽和性によって x_i よりも，従って（推移性から）x_i^* よりも，$\succ_i$ の意味で選好される点が予算集合内に存在してしまう．すなわち，

$$\forall i\in I,\,(x_i\sim_i x_i^*)\Rightarrow p^*\cdot x_i=p^*\cdot\omega_i+\sum_{j\in J}\theta_{ij}p^*\cdot y_j^*. \tag{78}$$

$x_i^*\precsim_i x_i$ ということは $x_i^*\sim_i x_i$ であるか $x_i\succ_i x^*$ であるかのいずれかであるので，式 (78) から，

$$\forall i\in I,\, p^*\cdot x_i^*\le p^*\cdot x_i'. \tag{79}$$

式 (79) の $i\in I$ に関する和をとり，さらに式 (77) を考慮すれば

$$p^*\cdot\sum_{i\in I}x_i' > p^*\sum_{i\in I}x_i^* = p^*\cdot(\sum_{i\in I}\omega_i+\sum_{j\in J}y_j^*). \tag{80}$$

一方 $(x_i')_{i\in I}$ の実現可能性，

$$\sum_{i\in I}x_i'-\sum_{i\in I}\omega_i-\sum_{j\in J}y_j'=0,$$

から，我々は

$$p^*\cdot\sum_{i\in I}x_i'-p^*\cdot\sum_{i\in I}\omega_i-p^*\cdot\sum_{j\in J}y_j'=0, \tag{81}$$

であることを知る．生産主体の行動（ $\forall j\in J,\, p^*\cdot y_j'\le p^*\cdot y_j^*$ ）を考慮すれば，式 (81) は明らかに式 (80) と矛盾する． **Q.E.D.**

Assumption 6.5 任意の $i\in I,\,\bar{x}\in X_i$ について，$\{x|\,\bar{x}\precsim_i x\}$ は凸集合である．

Assumption 6.6 任意の $j\in J$ について，Y_j は凸集合である．

Lemma 6.7 （厚生経済学の第 2 基本定理のための補題）パレート最適な任意の社会状態 $((x_i^*)_{i\in I},(y_j^*)_{j\in J})$ は，もしもその状態が少なくとも一人の $\hat{i}\in I$ について選好の飽和点でないとすると，仮定 6.3，仮定 6.5, および仮定 6.6 の下で，ある $p\in R^\ell\setminus\{0\}$ が存在して，

$$\begin{aligned}\forall\quad & i\in I,\ \forall x_i\in\{x\in X_i|\,x_i^*\precsim_i x\},\ p\cdot(x_i-x_i^*)\ge 0\\ \forall\quad & j\in J,\ \forall y_j\in Y_j,\ p\cdot y_j\le p\cdot y_j^*\end{aligned}$$

とすることができる．

Proof： 以下任意の $i\in I$ および $x\in X_i$ について，$X_i[x\precsim_i]$ でもって集合 $\{z\in X_i|\,x\precsim_i z\}$ を，$X_i[\succ_i x]$ でもって集合 $\{z\in X_i|\,z\succ_i x\}$ をそれぞれ表すことにする．パレート最適性の仮定より，（ $\hat{i}\in I$ について $x_{\hat{i}}^*$ は選好の非飽和点であるから）

$$W=X_{\hat{i}}[\succ_{\hat{i}}x_{\hat{i}}^*]+\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq\hat{i}}}X_i[x_i^*\precsim_i]-\sum_{j\in J}Y_j$$

に，$\omega=\sum_{i\in I}\omega_i$ は属さない．(もし属すなら，$i\neq\hat{i}$ については少なくとも無差別で $\hat{i}$ についてはより好ましい feasible allocation が存在することになる．) 第一分離定理によって，W と ω を分離する，$p\in R^{\ell}\setminus\{0\}$ を

$$\forall w\in W,\ p\cdot w\geq p\cdot\omega$$

なるようにとることができる．$\omega=\sum_{i\in I}x_i^*-\sum_{j\in J}y_j^*$ であるから，上式は

$$p\cdot\left(\sum_{i\in I}(x_i-x_i^*)+\sum_{j\in J}(y_j^*-y_j)\right)\geq 0$$

$\forall x_{\hat{i}}\in X_{\hat{i}}[\succ_{\hat{i}} x_{\hat{i}}], \forall x_i\in X_i[x_i\precsim_i], i\neq\hat{i}, \forall y_j\in Y_j, j\in J,$ を意味する．上で特に $x_i=x_i^*\in X_i[x_i^*\precsim_i], \forall i\neq\hat{i},$ $y_j=y_j^*\in Y_j, \forall j\in J$ とすれば，

$$\forall x_{\hat{i}}\in X_{\hat{i}}[\succ_{\hat{i}} x_{\hat{i}}^*],\ p\cdot(x_{\hat{i}}-x_{\hat{i}}^*)\geq 0$$

を得る．従って，仮定 6.3 を用いて，[37]

$$\forall x_{\hat{i}}\in X_{\hat{i}}[x_{\hat{i}}^*\precsim_{\hat{i}}],\ p\cdot(x_{\hat{i}}-x_{\hat{i}}^*)\geq 0.$$

全く同様にして，各 $i\neq\hat{i}$ について，

$$\forall x_i\in X_i[x_i^*\precsim_i],\ p\cdot(x_i-x_i^*)\geq 0.$$

さらに，各 $j\in J$ について，

$$\forall y_j\in Y_j,\ p\cdot y_j^*\geq p\cdot y_j.$$

となる． **Q.E.D.**

（注意）$\omega=\sum_{i\in I}\omega_i\gg 0$ とする．feasibility から $p\cdot\omega=p\cdot\left(\sum_{i\in I}x_i^*-\sum_{j\in J}y_j^*\right)$ であることに注意すると，

$$\hat{\omega}_i=\alpha_i\omega,\quad \text{ただしここで } \alpha_i=\frac{p\cdot x_i^*-\sum_{j\in J}\theta_{ij}p\cdot y_j^*}{p\cdot\omega}$$

とおくことによって，$\sum_{i\in I}\hat{\omega}_i=\sum_{i\in I}\omega_i$. さらに，

$$\forall x_i\in X_i,\ (x_i^*\precsim_i x_i)\Longrightarrow p\cdot x_i\geq p\cdot\hat{\omega}_i+\sum_{j\in J}\theta_{ij}p\cdot y_j^*$$

が全ての $i\in I$ について成り立つ．即ち，この $\hat{\omega}$ を initial endowment の再配分と考えて，$(p,(x_i^*)_{i\in I},(y_j^*)_{j\in J})$ が quasi-equilibrium であることが言える.[38]

6.4 一般均衡の存在

生産を含む一般均衡の図を用いた直観的説明として，福尾・他 (1996; Chapter 6 担当浦井) を参照せよ．

以下，経済 $\mathcal{E}$ における超過需要対応（または関数）$\zeta:\Delta\to\boldsymbol{R}^{\ell}$,（ただし $\Delta=\{p=(p_1,\cdots,p_\ell)\in\boldsymbol{R}_+^{\ell}|\sum_{k=1}^{\ell}p_k=1\}$ とする）が定義されているものとする．実際には，$\Delta=\{p=(p_1,\cdots,p_\ell)\in\boldsymbol{R}_+^{\ell}|\sum_{k=1}^{\ell}p_k=1\}$ の部分集合で定義されていることがほとんどであり，通常はそれを技巧的に Δ 上の対応（関数）に拡張する（Debreu (1959) の方法）か，あるいは Boundary Condition を用いる必要がある．以下 2 つの項では，幸運にも超過需要対応（関数）が Δ 上で定義されている場合を考える．(これを Debreu 的に修正・拡張された超過需要関数と考える場合には，以下の議論に若干の修正が必要である．) また，Boundary Condition を用いる方法については，節の最後の項で触れる．

[37] Non ordered の場合，ここで仮定 6.14 を用いれば，同様のことが言える．

[38] quasi-equilibrium が equilibrium であるための条件としては，例えば各 i について x_i^* が X_i の内点であれば良い．

6.4.1　基本形 (Debreu 1959)

Theorem 6.8　Δ からそれ自身への対応 Φ を次のように定義する．

$$\Phi : \Delta \ni p \mapsto \{\hat{p} \in \Delta |\, \exists \hat{z} \in \zeta(p), \hat{p} \cdot \hat{z} = \max\{q \cdot z |\, q \in \Delta, z \in \zeta(p)\}\} \subset \Delta \tag{82}$$

このとき，対応 Φ の不動点 p^*（$p^* \in \Phi(p^*)$ となるようなもの）は一般均衡価格である．

(Proof)　不動点 p^* に関して，式 (82) の右辺の定義によって，ある $\hat{z} \in \zeta(p^*)$ が存在して，任意の $q \in \Delta$ をとってきたとき，

$$q \cdot \hat{z} \leq p^* \cdot \hat{z}$$

が成立する．右辺は，$\hat{z}$ が p^* の下での超過需要であることから，≤ 0 である．ここで q に代えて $(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, \cdots, 0, 1)$ を代入することで，結論を得る．[39]　**(Q.E.D.)**

6.4.2　模索過程を応用した不動点写像

Theorem 6.9　超過需要対応 ζ が Δ 上の関数であるとき，(従って $\zeta(p) = (\zeta_1(p), \cdots, \zeta_\ell(p))$ と表せるとき），Δ からそれ自身への関数 $\Phi : \Delta \ni (p_1, \cdots, p_\ell) \mapsto (\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_\ell) \in \Delta$ を以下のように定義する．

$$\hat{p}_k = \frac{p_k + \max\{0, \zeta_k(p)\}}{1 + \sum_{s=1}^{\ell} \max\{0, \zeta_s(p)\}}, k = 1, 2, \cdots, \ell, \tag{83}$$

このとき，関数 Φ の不動点 p^*（ $p^* = \Phi(p^*)$ となるようなもの）は一般均衡価格である．

(Proof)　Φ の不動点 $p^* = (p_1^*, \cdots, p_\ell^*)$ においては，式 (83) より各 $k = 1, 2, \cdots, \ell$ について

$$p_k^* \sum_{s=1}^{\ell} \max\{0, \zeta_s(p^*)\} = \max\{0, \zeta_k(p^*)\} \tag{84}$$

が成立する．ここで $k = 1, 2, \cdots, \ell$ の中に $\zeta_k(p^*) > 0$ となるようなものが存在すると仮定して矛盾を導く．さて，この仮定の下では $\sum_{s=1}^{\ell} \max\{0, \zeta_k(p^*)\} > 0$ となる．このとき式 (84) から，$k = 1, 2, \cdots, \ell$ について，

$$p_k^* = 0 \iff \zeta_k(p^*) \leq 0 \tag{85}$$

であることがわかる．従って，任意の $k = 1, 2, \cdots, \ell$ について

$$p_k^* \max\{0, \zeta_k(p^*)\} = p_k^* \zeta_k(p^*) \tag{86}$$

となる．ここで，式 (86) を $k = 1, 2, \cdots, \ell$ について足しあわせると，ワルラス法則より，

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k^* \max\{0, \zeta_k(p^*)\} \leq 0 \tag{87}$$

上式左辺の各項は非負であるので，$\forall k$, $\zeta_k(p^*) \leq 0$ となるが，もちろんこれは仮定に反する．　**(Q.E.D.)**

[39] ワルラス法則が等号で成立している（$p^* \cdot \hat{z} = 0$）ときは，$\hat{z} \leq 0$ かつ $p^* \geq 0$ であることから，ある k について $\hat{z}_k < 0$ かつ $p_k^* \neq 0$ ならば $p^* \cdot \hat{z} < 0$ となってしまうので，すべての k について $\hat{z}_k < 0$ なら $p_k^* = 0$ が従う．

6.4.3 Revealed Preference Relation を用いる方法

Theorem 6.10 各 $p \in \Delta$ に対して $\zeta(p)$ がコンパクト凸集合であるものとする．価格 $p \in \Delta$ と価格 $q \in \Delta$ の間の関係 $\succeq$ を次のように定義する．

$$p \succeq q \iff \neg(\forall z \in \zeta(p),\, q \cdot z > 0) \tag{88}$$

このとき Δ 上で $\succeq$ の意味で maximal な価格 p^* （任意の $p \in \Delta$ に対して $p^* \succeq p$ となるもの）は一般均衡価格である．

(Proof) 任意の $q \in \Delta$ に対して $p^* \succeq q$ であるから，任意の $q \in \Delta$ に対して，ある $z(q) \in \zeta(p^*)$ が存在して $q \cdot z(q) \leq 0$ となる．

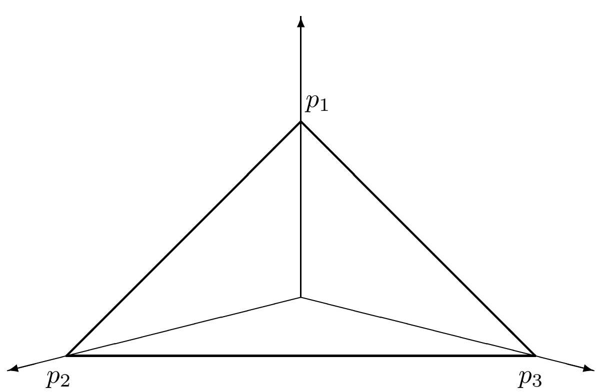
いま $\zeta(p^*)$ がコンパクト凸集合であるから，$\zeta(p^*) \cap -\boldsymbol{R}^\ell_+ = \emptyset$ と仮定すると $\zeta(p^*)$ と $-\boldsymbol{R}^\ell_+$ を strictly に分離する超平面 $H = \{x | \hat{p} \cdot x - \alpha = 0\}$, $\hat{p} \cdot z > 0, \forall z \in \zeta(p^*)$, $\hat{p} \cdot y - \alpha \leq 0, \forall y \in -\boldsymbol{R}^\ell_+$ が存在する．もしもある $y \in -\boldsymbol{R}^\ell_+$ について $\hat{p} \cdot y > 0$ ならば，十分大きな $\lambda > 0$ によって $\hat{p} \cdot \lambda y > \alpha$ とできるが，これは $\lambda y \in -\boldsymbol{R}^\ell_+$ なることに反する．従って，任意の $y \in -\boldsymbol{R}^\ell_+$ に対して $\hat{p} \cdot y \leq 0$ でなければならない．よって $\hat{p} \geq 0$ すなわち $\frac{\hat{p}}{\sum_{k=1}^{\ell} |\hat{p}_k|} \in \Delta$ でなければならない．ところが $\hat{p} \cdot z > 0, \forall z \in \zeta(p^*)$ だから，これは任意の $q \in \Delta$ に対してある $z(q) \in \zeta(p^*)$ が存在して $q \cdot z(q) \leq 0$ となる，ということに反する．よって $\zeta(p^*) \cap -\boldsymbol{R}_+ \neq \emptyset$. **(Q.E.D.)**

6.4.4 Boundary Condition を用いての方法

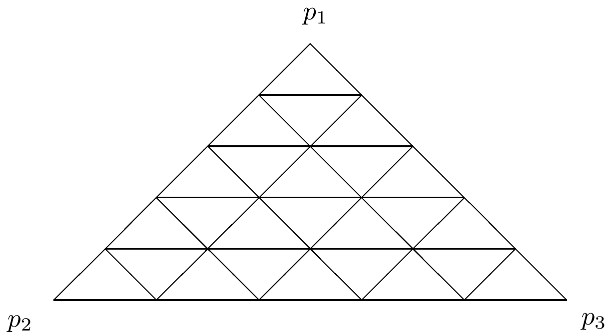
超過需要対応に対する Boundary Condition について，古典的には Nikaido (1968) (Nikaido, 1968) に詳しい．Grandmont (1977) (Grandmont, 1977) は Temporary General Equilibrium の展望論文であるが，その market equilibrium の lemma で用いられている Boundary Condition は超過需要対応に与えられるものの中では最も弱い条件の一つとしてよく参照される．上記のものはいずれも超過需要対応の定義域が unit simplex の dense subset でなくてはならない．定義域を一般に unit simplex の open subset として述べた Boundary Condition については Neuefeind (1980) (Neuefeind, 1980) の条件が挙げられる．

- 超過需要関数に話を限る場合については，補論２ Global Analysis を参照せよ．
- 超過需要関数で話をする背後の思想として Debreu-Mantel-Sonnenschein の定理がある．

6.5 補論１：Computation ならびに不動点定理



いま連続関数 $\Phi : \Delta \to \Delta$ が任意に与えられているものとして，Φ の不動点をもとめるアルゴリズムを考える．Δ は左図の p_1, p_2, p_3 を頂点とする図形に代表されるようなものである．



Δ に単体分割を施す．

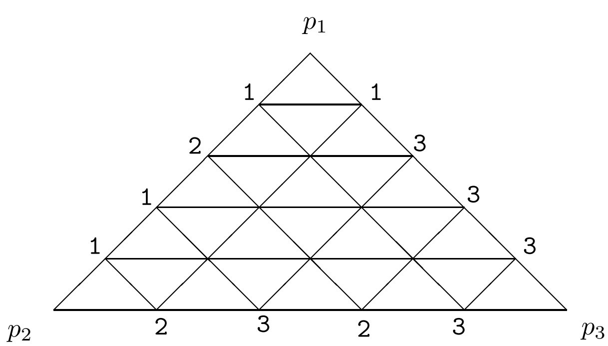
Definition 6.11（単体および辺単体） $\boldsymbol{R}^\ell$ における $k+1$ 個の点 $x^0, x^1, \cdots, x^k$ にから決まる k 個のベクトルの組 $x^1 - x^0, x^2 - x^0, \cdots, x^k - x^0$ が一次独立であるとき，$x^0, x^1, \cdots, x^k$ の非負凸結合の全体 $\{\sum_{s=0}^k \lambda_s x^s | \sum_{s=0}^k \lambda_s = 1, \lambda_s \geq 0, \forall s = 0, 1, \cdots, k\}$ を $\overline{x^0 x^1 \cdots x^k}$ で表し，k **次元単体**と呼ぶ．またこのとき $x^0, x^1, \cdots, x^k$ をその単体の**頂点**と呼ぶ．$x^0, x^1, \cdots, x^k$ のうちのいくつかを残して有限個の点を取り去ったものを $y^0, \cdots, y^m$ とすれば，$\overline{y^0, \cdots, y^m}$ もまた m（$\leq k$）次元単体である．このような単体を，もとの単体の**辺単体**と呼ぶ．

Definition 6.12（単体分割） $\Delta \subset \boldsymbol{R}^\ell$ とし，$\mathcal{S} = \{\sigma_i | i \in I\}$ を有限個の ℓ 次元単体からなる集合とする．$\mathcal{S}$ が次の二つの条件を満たすとき，$\mathcal{S}$ は Δ の**単体分割**と呼ばれる．

(i) $\Delta = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$

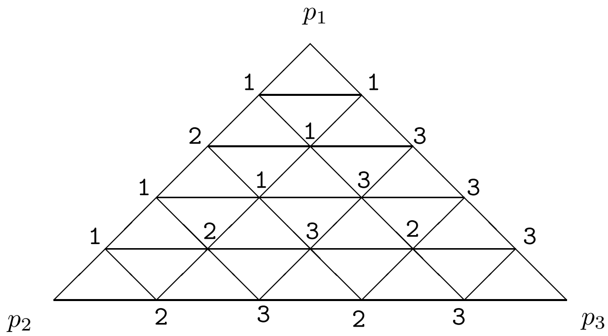
(ii) $\forall i, j \in I$ について，$\sigma_i \cap \sigma_j$ は空集合であるか，σ_i と σ_j 双方の辺単体であるかのいずれかである．

特に Δ 自体が ℓ 次元単体であるとき，混乱を避けるために各 σ_i は ℓ 次元**小単体**と呼ばれる．



小単体の頂点となる点に対して $1, 2, \cdots, \ell+1$ という番号付けをおこなう．図では $1, 2, 3$ という番号付けである．

（番号付けに際しての約束）このとき，Δ の $\ell - 1$ 次元（以下のすべての）辺単体 $\overline{p_i \cdots p_j}$ 上にくる小単体の頂点に対しては必ず i または $\cdots$ または j という番号が付くようにする（上図）．それ以外の頂点には $1, 2, \cdots, \ell$ のうちどのような番号を付けても良いものとする（下図）．

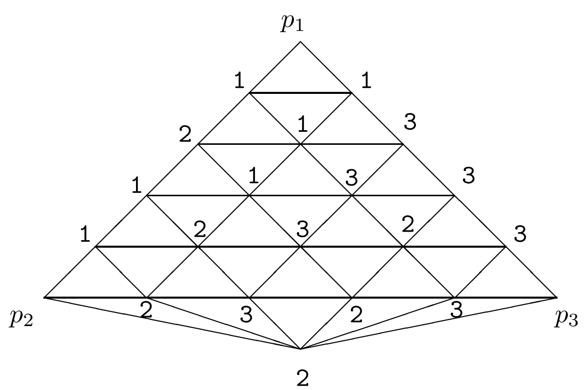


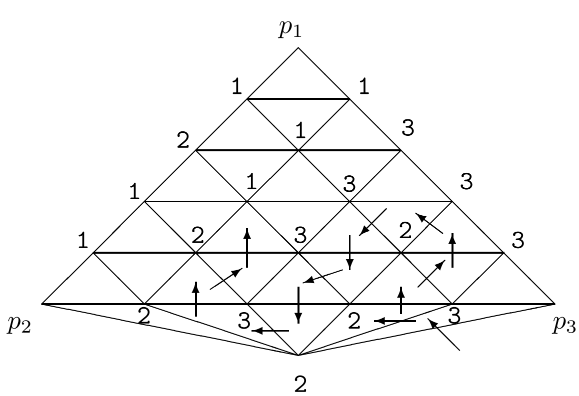
このとき，$1, 2, \cdots, \ell$ という番号が付けられた小単体 (completely labeled subsimplex) が少なくとも一つ（正確には奇数個）存在することが知られている（Sperner の補題）．

話を $\Phi : \Delta \to \Delta$ という写像にもどす．Δ の単体分割に属する小単体 σ の頂点 x は Φ によって $\Phi(x) \in \Delta$ に写されるが，このとき x の座標表現 $x = (x_1, \cdots, x_\ell)$ と $\Phi(x)$ の座標表現 $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \cdots, \Phi_\ell(x))$ とを見比べて，$\Phi_i(x)$ が x_i 以下になるような最初の i をもって，σ の頂点 x への番号付けとする．このような番号付けは上記の（番号付けに際しての約束）を満たす．

さらにこのとき $1, 2, \cdots, \ell$ という番号のついている小単体は，Φ の不動点の近似を与える．

従って不動点の近似をもとめることは，$1, 2, \cdots, \ell$ という番号のついている小単体を見つけだすことに帰着する．





Scarf のアルゴリズム (c.f. (Scarf, 1982))

6.6　補論２：Global Analysis

静学的一般均衡の問題，とりわけ単純交換の場合の均衡存在という非常に数学的にシンプルな形で取り扱うことのできる問題は，その後「均衡が少なくとも一つ存在するためのパラメター（初期保有量など）の条件確認」という当初の目的内容から「均衡価格とそのような均衡価格存在のためのパラメターの関係を見る」言いかえれば「経済とその均衡価格の組その全体からなる図形（均衡多様体の大域的形状）の分析」へと向かった．

今，様々な経済（単純交換経済）を考慮する上で，人々の人数（合計 m 人）と，それらの効用関数（u_i, $i = 1, \ldots, m$）とを固定し，初期保有 $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) \in R^{\ell m}$ のみを $\omega' \in R^{\ell m}$, $\omega'' \in R^{\ell m}$ などに変えていくことにしよう．[40]

例えばこのとき効用関数に豊富な数学的性質を仮定（直前の注を参照）しておくと均衡多様体（ω の違いで表される経済の様々な在り方とその均衡価格との組合せがつくる図形）の形状は次のようなものになる．

図未完成

Figure 2: 均衡多様体の形状

均衡多様体は次のようなマップ（parametrization）を通じて局所的に $R^{\ell m}$ と同一視できる（ ℓm 次元可微分多様体）．

$$\phi : (p, \omega) \mapsto (p, p \cdot \omega_1, \ldots, p \cdot \omega_m, \bar{\omega_1}, \ldots, \bar{\omega_{m-1}}) \tag{89}$$

ここで，p は第 ℓ 座標を 1 に固定して $\ell - 1$ 次元の厳密に正なる値を自由にとる価格を表し，$\bar{\omega_1}, \ldots, \bar{\omega_m}$ はそれぞれ $\omega_1, \ldots, \omega_m$ の最初の $\ell - 1$ 次元分にあたる要素を表す．

図の射影 π（均衡多様体から ω 平面への）を natural projection と呼び，natural projection の（上記の意味での ℓm 次元多様体からやはり ℓm 次元の ω 平面）critical value（derivative の rank が行き先の ℓm 次元より小さいような点 critical point の写り先）になっているような経済を singular economy, そうでない（regular value となっている）経済を regular economy と呼ぶ．critical value の全体は測度０の閉集合であることが知られている（Sard's Theorem —要するに，数学的には非常に狭い範囲に点々と存在しているにすぎないということ）．

非常に広い範囲をしめる regular economy において，均衡は全て局所的に一意である．(natural projection の導値の one one 性から直ちに従う.）均衡の集合がコンパクトであることは簡単に示せるので，このことか

[40]ただしここで各人に固定した効用関数については，消費の章で述べたような微分可能な需要関数が導出されるために十分な仮定，そしてまた経済の「正則性」を議論するにあたって十分な性質，例えば選好の lower bounded 条件とかヘッセ行列の負の定符号条件（各人の需要のスルツキー行列に対する負の定符号を少なくとも no trade 状態においては保証する条件）等が仮定されるものとする．

ら直ちに，regular economy の均衡の個数は有限個である (Debreu, 1970) ことが分かる．写像度の概念を用いれば更にこれが奇数個であることが言える．ここで π の写像度（mod 2 degree）とは，π の regular value である ω に対して $\pi^{-1}(\omega)$ の個数を 2 で割った余りをさすもので，これは π に対して一意的に定まる事が知られている（Milnor (1965), Section 4 に詳しい）．均衡が一意的であるような regular economy の存在は容易に示せる（例えばパレート最適な no trade 均衡）ので，π の mod 2 degree は 1 であり，これは一般に regular economy の均衡の個数が奇数個，とりわけ 0 でないことが保証されていることになる．(写像度は mod 2 degree の他に Brouwer degree と呼ばれるものについても考えることができ，その場合これとほぼ類似の事実が index theorem と呼ばれるものになる．)

不完備市場における合理的期待均衡をはじめ，多くの均衡存在問題が regular economy に話を限定して示してしまう議論 generic existence によって可能となった．一連の研究は上述の Debreu (1970) およびその拡張としての Smale (1974), Smale (1974), Smale (1974), Smale (1976) に端を発したものである．テキストとしては Mas-Colell (1985) が著名である．また単純交換経済に話を限定しており，とりわけ一般均衡の経済学的意義をはじめとしていくぶん偏った見解が随所に目立つものの，Balasko (1988) は（少なくとも Theory 的には）非常に見通しの良いテキストである．

6.7　補論３：選好が non-ordered の場合

一般的選好についても，厚生経済学の第一，第二基本定理，均衡の存在定理，といった一般均衡理論における基本的な定理のほとんどは（ほぼ満足のいく形で）成立している．

詳細については述べるスペースが無いが，以下，非常に雑な議論で，その大まかな感覚だけを伝える．(文章中で多分とかあるのは，本当に多分であって，私もまだきちんと確かめたわけではない．興味のある人は，自ら確かめてみられると良い．)

6.7.1　non-ordered の場合の第一基本定理について

$\hat{X}_i = \{x_i \in X_i | \, (z_j)_{j \in I} \in F, z_i = x_i\}$ と定義する．

Assumption 6.13　$\forall i \in I$ について，任意の 2 つの $x, x' \in \hat{X}_i,$ に対して，ある $z \in X_i$ が存在して，$z \succ_i x$ かつ $z \succ_i x'$ となる．

上の仮定と Debreu の I, II (X_i が凸であり，かつ $x' \succ_i x$ ならば $\forall t \in (0,1), tx' + (1-t)x \succ_i x$) があれば，推移性および完備性は不必要となる（多分）．

上の仮定をさらに一般化して，(少し形は悪いが）次の仮定の下で，推移性は（多分完備性も）不必要となる．

Assumption 6.14 $\forall i \in I$ について，選好の非飽和点 $x \in \hat{X}_i$ と $x' \in \hat{X}_i$，$x' \sim_i x$ を任意にとるとき，$x' \in X_i$ の任意の開近傍 U（ X_i open ）に対して，ある $z \in U$ が存在して，$(z, x) \in \succ_i$ かつ $(z, x') \in \succ_i$ とすることができる．

上よりも少し強い（未確認）が，形としては良い次の仮定でも良いかもしれない．

Assumption 6.15　$\forall i \in I$ について，任意の選好の非飽和点 $x_i \in \hat{X}_i$ において，$X_i[x_i \precsim_i] = \mathrm{cl}\, X_i[\succ_i x_i]$ が成り立つ．

6.7.2　non-ordered の場合の第二基本定理について

先の定理 6.7 の証明中，脚注に記した通り．

6.7.3　non-ordered の場合の均衡の存在について

Shafer and H.F.Sonnenschein (1975), Gale and Mas-Colell (1975) 等が基本的文献である．特に前者は短いのですぐに読め，必要な知識も対応の連続性についてのきちんとした議論ができる程度で十分である．

特に均衡の存在に関しては，一般性において犠牲にするものが無いのみならず，証明の簡潔さにおいても non-ordered の方が整理されているところもあるので，抽象経済などでは non-ordered で議論するのがむしろ通常になっている．(c.f. Urai (2000), Urai and Hayashi (2000) 等の，更なる一般化の方向もある．前者は non-ordered に限らず，この章の関連分野におけるその他の重要文献をかなり網羅しているので，参照されたい．)

6.7.4　non-ordered の場合のその他の議論

例えば core equivalence, Social Choice における Walras 対応の特徴付け，といったものの non-ordered での議論があり得る．

REFERENCES

Balasko, Y. (1988): *Foundations of the Theory of General Equilibrium.* Academic Press, New York.

Debreu, G. (1970): "Economies with a finite set of equilibria," *Econometrica 38*(3), 387–392. Reprinted in G. Debreu, *Mathematical Economics*, pp. 151-162. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

福尾 洋一・他 (1996): 『経済学理論の基礎』 八千代出版, Tokyo.

Gale, D. and Mas-Colell, A. (1975): "An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences," *Journal of Mathematical Economcs 2*, 9–15. (For some corrections see *Journal of Mathematical Economics*, vol.6: 297–298, 1979.).

Grandmont, J. M. (1977): "Temporary general equilibrium theory," *Econometrica 45*(3), 535–572.

Mas-Colell, A. (1985): *The Theory of General Economic Equilibrium: A Differentiable Approach.* Cambridge University Press, Cambridge.

Milnor, J. W. (1965): *Topology from the Differentiable Viewpoint.* University Press of Virginia, Charlottesville.

Neuefeind, W. (1980): "Notes on existence of equilibrium proofs and the boundary behavior of supply," *Econometrica 48*(7), 1831–1837.

Nikaido, H. (1968): *Convex Structures and Economic Theory.* Academic Press, New York.

Scarf, H. (1982): "The computation of equilibrium prices: an exposition," in *Handbook of Mathematical Economics, Volume II*, (K.J.Arrow, and M.D.Intriligator, ed) , North-Holland, New York.

Shafer, W. and H.F.Sonnenschein, (1975): "Equilibrium in abstract economies without ordered preferences," *Journal of Mathematical Economics 2*, 345–348.

Smale, S. (1974): "Global analysis and economics IIA: Extension of a theorem of Debreu," *Journal of Mathematical Economics 1*, 1–14.

Smale, S. (1974): "Global analysis and economics III: Pareto optima and price equilibria," *Journal of Mathematical Economics 1*, 107–117.

Smale, S. (1974): "Global analysis and economics IV: Finiteness and stability of equilibria with general consumption sets and production," *Journal of Mathematical Economics 1*, 119–127.

Smale, S. (1976): "A convergent process of price adjustment and global Neuton methods," *Journal of Mathematical Economics 3*, 107–120.

Urai, K. (2000): "Fixed point theorems and the existence of economic equilibria based on conditions for local directions of mappings," *Advances in Mathematical Economics 2*, 87–118.

Urai, K. and Hayashi, T. (2000): "A generalization of continuity and convexity conditions for correspondences in the economic equilibrium theory," *The Japanese Economic Review 51*(4), 583–595.

【静学的一般均衡理論についての問題】

EXERCISE 6.1 （$\star$）I を任意の集合とする．全ての $i \in I$ について X_i を前順序 $\precsim_i$ の入った集合とし，集合 $F \subset \prod_{i \in I} X_i$ 上の関係 $\precsim$ を，各 $x = (x_i)_{i \in I}$, $x' = (x'_i)_{i \in I} \in F$ について, $(x \precsim x') \iff (\forall i \in I, x_i \precsim_i x'_i)$ と定義するとき，$\precsim$ は F 上の前順序であることを示せ．さらに，attainable state $((x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J})$ が Pareto-optimal であることと，そこにおける $(x_i)_{i \in I}$ が F の $\precsim$-maximal element であることが，同値であることを示せ.（A4 用紙 1 枚以内.）

EXERCISE 6.2 （$\star\star\star\star$）選好 $\precsim_i$ を任意の binary relation として（ $\precsim_i \subset X_i \times X_i$ のみを仮定し，reflexivity, transitivity, completeness 等一切仮定せず，$\succ_i$ をうまく定義して）パレート最適の定義ならびに消費主体の最大化問題を拡張せよ．また，その拡張された定義の下で，定理 6.4 および 定理 6.7 の対応物を導け.

EXERCISE 6.3 （$\star\star\star$）$\Delta = \{p = (p_1, \cdots, p_\ell) | \sum_{k=1}^{\ell} p_k = 1,\ p_k \geqq 0,\ k = 1, \cdots, \ell\}$ を定義域とする超過需要関数 $z(p) = (z_1(p), \cdots, z_\ell(p))$ がワルラス法則を等式で満たす連続関数であるものとする.

(i) 均衡価格 $p^* = (p_1^*, \cdots, p_\ell^*)$, $z(p^*) \leq 0$ の存在を証明せよ.

(ii) 均衡において，いずれかの財の価格が 0 となることはあり得るか．あるとすれば具体例を，ないとすればその証明を与えよ.

(iii) 均衡価格の集合 $\{p^* \in \Delta | z(p^*) \leq 0\}$ が Δ の閉部分集合であること（従ってコンパクト集合であること）を証明せよ．またそれを用いて,「全ての均衡が local に unique であること（ p^* が均衡価格であるとき，p^* のある近傍において均衡価格は一つしかないということ）を仮定すれば，この経済の均衡は高々有限個である」ことを証明しなさい.

EXERCISE 6.4 （$\star\star\star$）A および B という二人の消費主体によって構成される単純交換経済において，主体 A の効用は A の消費量と B の効用水準に依存し，同時に B の効用は B の消費水準と A の効用水準に依存するという．このような経済において，最適な資源配分状態が存在するための条件を述べよ.