4 静学的一般均衡理論の概観

4.1 一般均衡の定義

生産主体 Y_j, $j = 1, \cdots, n$.

価格 $p \in \Delta \subset R^\ell$.

利潤関数 $\pi_j(p) = \sup\{p \cdot y | \, y \in Y_j\}$.

供給対応 $\eta_j(p) = \{y \in Y_j | \, p \cdot y = \pi(p)\}$

消費主体 $(X_i, \precsim_i, \omega_i, (\theta_{ij})_{j=1}^n)$, $i = 1, \cdots, m$.

価格 $p \in \Delta$（Δ は上の Δ と共通）.

資産関数 $W(p) = p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} \pi_j(p)$.

需要対応 $\xi_i(p) = \{x^* \in X_i | \, \forall x \in X_i, ((p \cdot x \leq W_i(p)) \rightarrow (x \precsim x^*))\}$.

上で $\Delta \subset R^\ell$ は，$\forall p \in \Delta$, について $\eta_j(p) \neq \emptyset$ なるように定義されているものとする.（定理 2.8，定義 2.17 の直後の記述等，参照せよ.）

以上の設定で，ある価格 p^* の下，総供給と総需要の大きさが等しくなる状態を一般均衡と呼ぶ.（しばしば総供給の大きさが総需要の大きさを上回る状態を Free Disposal 均衡と呼ぶ.）

Definition 4.1 **（一般均衡）**ある価格 p^* が存在して，その下での各主体の行動 y_j^*, $j = 1, \cdots, n$, x_i^*, $i = 1, \cdots, m$ が最適化 $y_j^* \in \eta_j(p^*)$，$j = 1, \cdots, n$, $x_i^* \in \xi_i(p^*)$, $i = 1, \cdots, m$ されており，$\sum_{i=1}^m \xi_i(p^*) = \sum_{i=1}^m \omega_i + \sum_{j=1}^n y_j^*$ となるとき，p^* を**一般均衡価格**，組 $(x_1^*, \cdots, x_m^*, y_1^*, \cdots, y_n^*)$ を**一般均衡状態**と呼ぶ.（しばしば $\sum_{i=1}^m \xi_i(p^*) \leq \sum_{i=1}^m \omega_i + \sum_{j=1}^n y_j^*$ が満たされる場合を Free Disposal 一般均衡と呼ぶ.）

以下，$I = \{1, \cdots, m\}$ および $J = \{1, \cdots, n\}$ でもって，消費主体および生産主体の Index Set とする．また「一般均衡」という言葉の代わりに「競争均衡」という言葉を用いることも多い.

4.2 主要概念

4.2.1 Attainable Set

ある経済 $\mathcal{E}$ において，一つの“**社会状態 (social outcome)** ”とは，その経済を構成する全ての主体の全ての商品にわたる消費量ならびに投入産出量のリスト $((x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J})$ を指す．実現可能な社会状態の全体からなる集合を，その経済の **Attainable Set** と呼び，以下では（ある一つの経済 $\mathcal{E}$ を固定して述べているものとして）これを A で表す．厳密に表現すると，次のようになる．

$$A = \{((x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J}) \in \prod_{i \in I} X_i \times \prod_{j \in J} Y_j | \sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} y_j + \sum_{i \in I} \omega_i\} \tag{92}$$

実現可能な社会状態 $((x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J}) \in A$ において，消費主体 i の消費量を表す x_i は，その消費主体がその社会において最終的に受け取るもの（その消費主体への資源配分）と言ってもよいであろう．この意味で，しばしば上のような x_i を**消費主体 i への資源配分 (Allocation for consumer i)** と呼んだり，$(x_i)_{i \in I}$ を**経済 $\mathcal{E}$ における一つの資源配分状態 (Allocation for Economy $\mathcal{E}$)** と呼んだりする．経済 $\mathcal{E}$ における**実現可**

能な資源配分状態（ **attainable allocation, feasible allocation** ）の全体 F は，先の Attainable Set A から次のように表される．

$$F = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i |\, \exists (y_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} Y_j, ((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}) \in A\} \tag{93}$$

一方 $((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}) \in A$ における $(y_j)_{j\in J}$ は，その和 $y = \sum_{j\in J} y_j$ をとることによって，経済 $\mathcal{E}$ 全体として，何を生産することが可能であるかということを表す．そのような y の全体を**生産可能性集合 (production possibility set)** と呼び，Y で表す．厳密に表すと，次のようになる．

$$Y = \{\sum_{j\in J} y_j |\, \exists (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i, ((x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}) \in A\} \tag{94}$$

4.2.2 Walras' Law

$y_j(p)$ を，価格 p のもとでの企業 j の主体的均衡とし，$x_i(p)$ を，同じ価格 p のもとでの消費主体 i の主体的均衡とする．各消費主体の資産関数 $W_i(p)$ が標準的な $p\cdot\omega_i + \sum_{j\in J}\theta_{ij} p\cdot y_j(p)$ という形であったとすると，全ての消費主体の予算制約式を足しあわせることによって次の式が成立する．

$$\sum_{i\in I} p\cdot x_i(p) \leq \sum_{i\in I} p\cdot \omega_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \theta_{ij} p\cdot y_j(p) \tag{95}$$

右辺の第 2 項は $\leq \sum_{j\in J} p\cdot y_j(p)$ だから，代入した後全体を左辺に移項して p でまとめると，

$$p\cdot(\sum_{i\in I} x_i(p) - \sum_{i\in I}\omega_i - \sum_{j\in J} y_j(p)) \leq 0 \tag{96}$$

を得る．式 (96) は，人々が予算の範囲内で行動する限りにおいて，超過需要の価値額は必ず負または 0 になることを表しており，広義のワルラス法則と呼ばれる．

4.3 最適性

経済 $\mathcal{E}$ における実現可能な資源配分状態の全体 F 上の関係 $\precsim$ を，各 $x = (x_i)_{i\in I}$, $x' = (x'_i)_{i\in I} \in F$ について，$(x \precsim x') \iff (\forall i \in I, x_i \precsim_i x'_i)$ と定義する．明らかに，$\precsim$ は F 上の前順序である（練習問題）．

Definition 4.2 （パレート最適）経済 $\mathcal{E}$ における実現可能な資源配分状態 $(x^*_i)_{i\in I} \in F$ が**パレート最適 (Pareto-Oprimal)** であるとは，$(x_i)_{i\in I} \in F$ で，$(x^*_i)_{i\in I} \precsim (x_i)_{i\in I}$ かつ少なくとも一つの $i \in I$ について $x_i \succ_i x^*_i$ となるようなものが存在しない，ことをいう．しばしば $((x^*_i)_{i\in I}, (y^*_j)_{j\in J}) \in A$ に対して，パレート最適という言葉が用いられることもある．

Assumption 4.3 $\forall i \in I$ について，x が X_i における選好の飽和点でないならば，i の選好は x において局所非飽和である．[21]

Theorem 4.4 （厚生経済学の第一基本定理）仮定 4.3 の下で，競争均衡状態 $((x^*_i)_{i\in I}, (y^*_j)_{j\in J})$ は，もしも $\forall i \in I$ について x^*_i が選好の飽和点でないとすると，パレート最適である．

[21] 選好が non-ordered（必ずしも ordered でない）場合においても，こういった基本定理のほとんどは成立する．補論 3 でまとめて取り扱う．

Proof： $((x_i^*)_{i\in I},(y_j^*)_{j\in J})$ に関する競争均衡価格を p^* とする．結論を否定（競争均衡状態がパレート最適でないと）すると，ある $((x_i')_{i\in I},(y_j')_{j\in J})\in A$ が存在して，$\forall i\in I,\, x_i^*\precsim_i x_i'$ かつ，ある $h\in I$ について，$x_h\succ_h x_h^*$ となる．$x_h\in X_h$ であるから，価格 p^* の下での消費主体の行動（ $\xi_h(p^*)$ ）の定義から直ちに，

$$p^*\cdot x_h^* < p^*\cdot x_h. \tag{97}$$

また $\forall i\in I$ について x_i^* は選好の飽和点でないから（推移性より）任意の $x_i\in X_i,\, x_i\precsim_i x_i^*$ も選好の飽和点ではなく，従って仮定 4.3 により局所非飽和である．特にこのとき $x_i\sim_i x_i^*,\, x_i\in X_i$ は X_i の開集合 $\{x\in X_i|\, p^*\cdot x<p^*\cdot\omega_i+\sum_{j\in J}\theta_{ij}p^*\cdot y_j^*\}$ に属さない．なぜなら，もしも属するならば，局所非飽和性によって x_i よりも，従って（推移性から）x_i^* よりも，$\succ_i$ の意味で選好される点が予算集合内に存在してしまう．すなわち，

$$\forall i\in I,\,(x_i\sim_i x_i^*)\Rightarrow p^*\cdot x_i=p^*\cdot\omega_i+\sum_{j\in J}\theta_{ij}p^*\cdot y_j^*. \tag{98}$$

$x_i^*\precsim_i x_i$ ということは $x_i^*\sim_i x_i$ であるか $x_i\succ_i x^*$ であるかのいずれかであるので，式 (98) から，

$$\forall i\in I,\, p^*\cdot x_i^*\le p^*\cdot x_i'. \tag{99}$$

式 (99) の $i\in I$ に関する和をとり，さらに式 (97) を考慮すれば

$$p^*\cdot\sum_{i\in I}x_i' > p^*\sum_{i\in I}x_i^* = p^*\cdot(\sum_{i\in I}\omega_i+\sum_{j\in J}y_j^*). \tag{100}$$

一方 $(x_i')_{i\in I}$ の実現可能性，

$$\sum_{i\in I}x_i'-\sum_{i\in I}\omega_i-\sum_{j\in J}y_j'=0,$$

から，我々は

$$p^*\cdot\sum_{i\in I}x_i'-p^*\cdot\sum_{i\in I}\omega_i-p^*\cdot\sum_{j\in J}y_j'=0, \tag{101}$$

であることを知る．生産主体の行動（ $\forall j\in J,\, p^*\cdot y_j'\le p^*\cdot y_j^*$ ）を考慮すれば，式 (101) は明らかに式 (100) と矛盾する． **Q.E.D.**

Assumption 4.5 任意の $i\in I,\,\bar{x}\in X_i$ について，$\{x|\,\bar{x}\precsim_i x\}$ は凸集合である．

Assumption 4.6 任意の $j\in J$ について，Y_j は凸集合である．

Lemma 4.7 （厚生経済学の第 2 基本定理のための補題）パレート最適な任意の社会状態 $((x_i^*)_{i\in I},(y_j^*)_{j\in J})$ は，もしもその状態が少なくとも一人の $\hat{\imath}\in I$ について選好の飽和点でないとすると，仮定 4.3，仮定 4.5, および仮定 4.6 の下で，ある $p\in R^\ell\setminus\{0\}$ が存在して，

$$\begin{aligned}\forall\quad & i\in I,\ \forall x_i\in\{x\in X_i|\,x_i^*\precsim_i x\},\ p\cdot(x_i-x_i^*)\ge 0\\ \forall\quad & j\in J,\ \forall y_j\in Y_j,\ p\cdot y_j\le p\cdot y_j^*\end{aligned}$$

とすることができる．

Proof： 以下任意の $i\in I$ および $x\in X_i$ について，$X_i[x\precsim_i]$ でもって集合 $\{z\in X_i|\,x\precsim_i z\}$ を，$X_i[\succ_i x]$ でもって集合 $\{z\in X_i|\,z\succ_i x\}$ をそれぞれ表すことにする．パレート最適性の仮定より，($\hat{\imath}\in I$ について $x_{\hat{\imath}}^*$ は選好の非飽和点であるから）

$$W=X_{\hat{\imath}}[\succ_{\hat{\imath}} x_{\hat{\imath}}^*]+\sum_{\substack{i\in I\\ i\ne\hat{\imath}}}X_i[x_i^*\precsim_i]-\sum_{j\in J}Y_j$$

に，$\omega = \sum_{i\in I}\omega_i$ は属さない．(もし属すなら，$i \neq \hat{i}$ については少なくとも無差別で $\hat{i}$ についてはより好ましい feasible allocation が存在することになる．) 第一分離定理によって，W と ω を分離する，$p \in R^\ell \setminus \{0\}$ を

$$\forall w \in W,\ p \cdot w \geq p \cdot \omega$$

なるようにとることができる．$\omega = \sum_{i\in I} x_i^* - \sum_{j\in J} y_j^*$ であるから，上式は

$$p \cdot \left(\sum_{i\in I}(x_i - x_i^*) + \sum_{j\in J}(y_j^* - y_j) \right) \geq 0$$

$\forall x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}[\succ_{\hat{i}} x_{\hat{i}}]$, $\forall x_i \in X_i[x_i \precsim_i]$, $i \neq \hat{i}$, $\forall y_j \in Y_j$, $j \in J$, を意味する．上で特に $x_i = x_i^* \in X_i[x_i^* \precsim_i]$, $\forall i \neq \hat{i}$, $y_j = y_j^* \in Y_j$, $\forall j \in J$ とすれば，

$$\forall x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}[\succ_{\hat{i}} x_{\hat{i}}^*],\ p \cdot (x_{\hat{i}} - x_{\hat{i}}^*) \geq 0$$

を得る．従って，仮定 4.3 を用いて，[22]

$$\forall x_{\hat{i}} \in X_{\hat{i}}[x_{\hat{i}}^* \precsim_{\hat{i}}],\ p \cdot (x_{\hat{i}} - x_{\hat{i}}^*) \geq 0.$$

全く同様にして，各 $i \neq \hat{i}$ について，

$$\forall x_i \in X_i[x_i^* \precsim_i],\ p \cdot (x_i - x_i^*) \geq 0.$$

さらに，各 $j \in J$ について，

$$\forall y_j \in Y_j,\ p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j.$$

となる． **Q.E.D.**

（注意）$\omega = \sum_{i\in I}\omega_i \gg 0$ とする．feasibility から $p \cdot \omega = p \cdot \left(\sum_{i\in I} x_i^* - \sum_{j\in J} y_j^* \right)$ であることに注意すると，

$$\hat{\omega}_i = \alpha_i \omega,\ \text{ただしここで}\ \alpha_i = \frac{p \cdot x_i^* - \sum_{j\in J}\theta_{ij} p \cdot y_j^*}{p \cdot \omega}$$

とおくことによって，$\sum_{i\in I}\hat{\omega}_i = \sum_{i\in I}\omega_i$. さらに，

$$\forall x_i \in X_i,\ (x_i^* \precsim_i x_i) \Longrightarrow p \cdot x_i \geq p \cdot \hat{\omega}_i + \sum_{j\in J}\theta_{ij} p \cdot y_j^*$$

が全ての $i \in I$ について成り立つ．即ち，この $\hat{\omega}$ を initial endowment の再配分と考えて，$(p, (x_i^*)_{i\in I}, (y_j^*)_{j\in J})$ が quasi-equilibrium であることが言える.[23]

4.4 一般均衡の存在

図を用いた直観的議論については，福尾・他 (1996; Chapter 6 担当浦井) を参照せよ．

以下，経済 $\mathcal{E}$ における超過需要対応（または関数）$\zeta : \Delta \to \boldsymbol{R}^\ell$,（ただし $\Delta = \{p = (p_1, \cdots, p_\ell) \in \boldsymbol{R}_+^\ell \mid \sum_{k=1}^\ell p_k = 1\}$ とする）が定義されているものとする．実際には，$\Delta = \{p = (p_1, \cdots, p_\ell) \in \boldsymbol{R}_+^\ell \mid \sum_{k=1}^\ell p_k = 1\}$ の部分集合で定義されていることがほとんどであり，通常はそれを技巧的に Δ 上の対応（関数）に拡張する（Debreu (1959) の方法）か，あるいは Boundary Condition を用いる必要がある．以下 3 つの項では，幸運にも超過需要対応（関数）が Δ 上で定義されているものと考える．(これを Debreu 的に修正・拡張された超過需要関数と考える場合には，以下の議論に若干の修正が必要である．) また，Boundary Condition を用いる方法については，節の最後の項で触れる．

[22]Non ordered の場合，ここで仮定 4.14 を用いれば，同様のことが言える（多分）．

[23]quasi-equilibrium が equilibrium であるための条件としては，例えば各 i について x_i^* が X_i の内点であれば良い．

4.4.1　基本形 (Debreu 1959)

Theorem 4.8　Δ からそれ自身への対応 Φ を次のように定義する．

$$\Phi : \Delta \ni p \mapsto \{\hat{p} \in \Delta \,|\, \exists \hat{z} \in \zeta(p), \hat{p} \cdot \hat{z} = \max\{q \cdot z \,|\, q \in \Delta, z \in \zeta(p)\}\} \subset \Delta \tag{102}$$

このとき，対応 Φ の不動点 p^*（$p^* \in \Phi(p^*)$ となるようなもの）は一般均衡価格である．

(Proof)　不動点 p^* に関して，式 (102) の右辺の定義によって，ある $\hat{z} \in \zeta(p^*)$ が存在して，任意の $q \in \Delta$ をとってきたとき，

$$q \cdot \hat{z} \leq p^* \cdot \hat{z}$$

が成立する．右辺は，$\hat{z}$ が p^* の下での超過需要であることから，≤ 0 である．ここで q に代えて $(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, \cdots, 0, 1)$ を代入することで，結論を得る．[24]　**(Q.E.D.)**

[24] ワルラス法則が等号で成立している（$p^* \cdot \hat{z} = 0$）ときは，$\hat{z} \leq 0$ かつ $p^* \geq 0$ であることから，ある k について $\hat{z}_k < 0$ かつ $p^*_k \neq 0$ ならば $p^* \cdot \hat{z} < 0$ となってしまうので，すべての k について $\hat{z}_k < 0$ なら $p^*_k = 0$ が従う．

4.4.2　模索過程を応用した不動点写像

Theorem 4.9 超過需要対応 ζ が Δ 上の関数であるとき,（従って $\zeta(p) = (\zeta_1(p), \cdots, \zeta_\ell(p))$ と表せるとき）, Δ からそれ自身への関数 $\Phi : \Delta \ni (p_1, \cdots, p_\ell) \mapsto (\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_\ell) \in \Delta$ を以下のように定義する．

$$\hat{p}_k = \frac{p_k + \max\{0, \zeta_k(p)\}}{1 + \sum_{s=1}^{\ell} \max\{0, \zeta_s(p)\}}, k = 1, 2, \cdots, \ell, \tag{103}$$

このとき，関数 Φ の不動点 p^*（ $p^* = \Phi(p^*)$ となるようなもの）は一般均衡価格である．

(Proof) Φ の不動点 $p^* = (p_1^*, \cdots, p_\ell^*)$ においては，式 (103) より各 $k = 1, 2, \cdots, \ell$ について

$$p_k^* \sum_{s=1}^{\ell} \max\{0, \zeta_s(p^*)\} = \max\{0, \zeta_k(p^*)\} \tag{104}$$

が成立する．ここで $k = 1, 2, \cdots, \ell$ の中に $\zeta_k(p^*) > 0$ となるようなものが存在すると仮定して矛盾を導く．さて，この仮定の下では $\sum_{s=1}^{\ell} \max\{0, \zeta_s(p^*)\} > 0$ となる．このとき式 (104) から，$k = 1, 2, \cdots, \ell$ について，

$$p_k^* = 0 \iff \zeta_k(p^*) \leq 0 \tag{105}$$

であることがわかる．従って，任意の $k = 1, 2, \cdots, \ell$ について

$$p_k^* \max\{0, \zeta_k(p^*)\} = p_k^* \zeta_k(p^*) \tag{106}$$

となる．ここで，式 (106) を $k = 1, 2, \cdots, \ell$ について足しあわせると，ワルラス法則より,

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k^* \max\{0, \zeta_k(p^*)\} \leq 0 \tag{107}$$

上式左辺の各項は非負であるので，$\forall k,\ \zeta_k(p^*) \leq 0$ となるが，もちろんこれは仮定に反する．[25] **(Q.E.D.)**

[25] ワルラス法則が等号で成立（$p^* \cdot \zeta(p^*) = 0$）ならば，$\zeta_k(p^*) < 0$ が $p_k^* = 0$ を意味することは，前の定理と全く同様の議論によって言える．

4.4.3 Revealed Preference Relation を用いる方法

Theorem 4.10 各 $p \in \Delta$ に対して $\zeta(p)$ がコンパクト凸集合であるものとする．価格 $p \in \Delta$ と価格 $q \in \Delta$ の間の関係 $\succeq$ を次のように定義する．

$$p \succeq q \iff \neg(\forall z \in \zeta(p),\, q \cdot z > 0) \tag{108}$$

このとき Δ 上で $\succeq$ の意味で maximal な価格 p^* （任意の $p \in \Delta$ に対して $p^* \succeq p$ となるもの）は一般均衡価格である．

(Proof) 任意の $q \in \Delta$ に対して $p^* \succeq q$ であるから，任意の $q \in \Delta$ に対して，ある $z(q) \in \zeta(p^*)$ が存在して $q \cdot z(q) \leq 0$ となる．

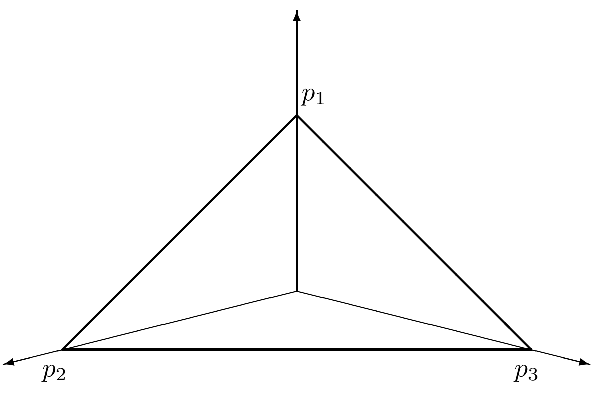
いま $\zeta(p^*)$ がコンパクト凸集合であるから，$\zeta(p^*) \cap -\boldsymbol{R}_+^\ell = \emptyset$ と仮定すると $\zeta(p^*)$ と $-\boldsymbol{R}_+^\ell$ を strictly に分離する超平面 $H = \{x | \, \hat{p} \cdot x - \alpha = 0\}$, $\hat{p} \cdot z > 0, \forall z \in \zeta(p^*)$, $\hat{p} \cdot y - \alpha \leq 0, \forall y \in -\boldsymbol{R}_+^\ell$ が存在する．もしもある $y \in -\boldsymbol{R}_+^\ell$ について $\hat{p} \cdot y > 0$ ならば，十分大きな $\lambda > 0$ によって $\hat{p} \cdot \lambda y > \alpha$ とできるが，これは $\lambda y \in -\boldsymbol{R}_+^\ell$ なることに反する．従って，任意の $y \in -\boldsymbol{R}_+^\ell$ に対して $\hat{p} \cdot y \leq 0$ でなければならない．よって $\hat{p} \geq 0$ すなわち $\frac{\hat{p}}{\sum_{k=1}^{\ell} |\hat{p}_k|} \in \Delta$ でなければならない．ところが $\hat{p} \cdot z > 0, \forall z \in \zeta(p^*)$ だから，これは任意の $q \in \Delta$ に対してある $z(q) \in \zeta(p^*)$ が存在して $q \cdot z(q) \leq 0$ となる，ということに反する．よって $\zeta(p^*) \cap -\boldsymbol{R}_+ \neq \emptyset$. **(Q.E.D.)**

4.4.4 Boundary Condition を用いての方法

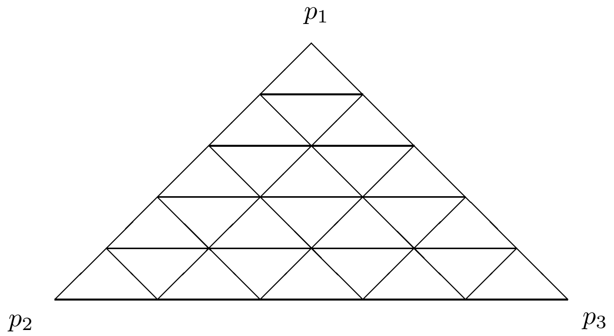
超過需要対応に対する Boundary Condition について，古典的には Nikaido (1968) (Nikaido, 1968) に詳しい．Grandmont (1977) (Grandmont, 1977) は Temporary General Equilibrium の展望論文であるが，その market equilibrium の lemma で用いられている Boundary Condition は超過需要対応に与えられるものの中では最も弱い条件の一つとしてよく参照される．上記のものはいずれも超過需要対応の定義域が unit simplex の dense subset でなくてはならない．定義域を一般に unit simplex の open subset として述べた Boundary Condition については Neuefeind (1980) (Neuefeind, 1980) の条件が挙げられる．

超過需要関数に話を限る場合は，補論 2 Global Analysis を参照せよ．

4.5 補論 1 ：Computation ならびに不動点定理



いま連続関数 $\Phi : \Delta \to \Delta$ が任意に与えられているものとして，Φ の不動点をもとめるアルゴリズムを考える．Δ は左図の p_1, p_2, p_3 を頂点とする図形に代表されるようなものである．



Δ に単体分割を施す．

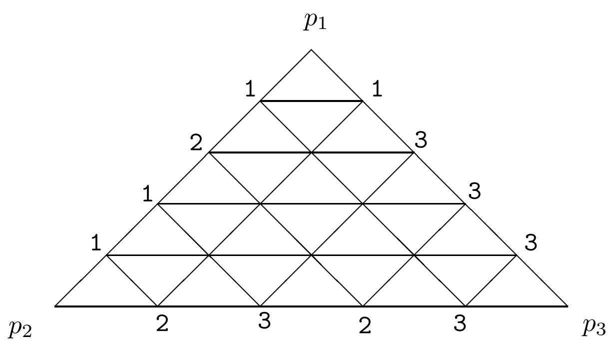
Definition 4.11 （単体および辺単体） $\boldsymbol{R}^\ell$ における $k+1$ 個の点 $x^0, x^1, \cdots, x^k$ にから決まる k 個のベクトルの組 $x^1 - x^0, x^2 - x^0, \cdots, x^k - x^0$ が一次独立であるとき，$x^0, x^1, \cdots, x^k$ の非負凸結合の全体 $\{\sum_{s=0}^k \lambda_s x^s | \sum_{s=0}^k \lambda_s = 1, \lambda_s \geq 0, \forall s = 0, 1, \cdots, k\}$ を $\overline{x^0 x^1 \cdots x^k}$ で表し，k **次元単体**と呼ぶ．またこのとき $x^0, x^1, \cdots, x^k$ をその単体の**頂点**と呼ぶ．$x^0, x^1, \cdots, x^k$ のうちのいくつかを残して有限個の点を取り去ったものを $y^0, \cdots, y^m$ とすれば，$\overline{y^0, \cdots, y^m}$ もまた m（$\leq k$）次元単体である．このような単体を，もとの単体の**辺単体**と呼ぶ．

Definition 4.12 （単体分割） $\Delta \subset \boldsymbol{R}^\ell$ とし，$\mathcal{S} = \{\sigma_i | i \in I\}$ を有限個の ℓ 次元単体からなる集合とする．$\mathcal{S}$ が次の二つの条件を満たすとき，$\mathcal{S}$ は Δ の**単体分割**と呼ばれる．

(i) $\Delta = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$

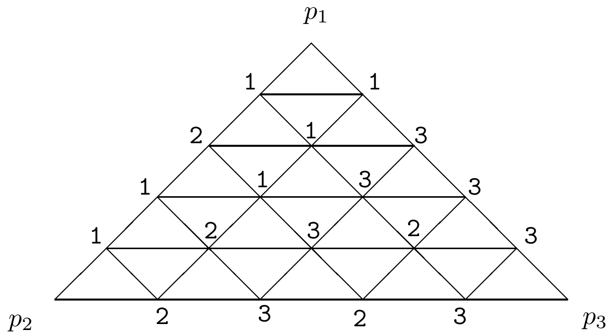
(ii) $\forall i, j \in I$ について，$\sigma_i \cap \sigma_j$ は空集合であるか，σ_i と σ_j 双方の辺単体であるかのいずれかである．

特に Δ 自体が ℓ 次元単体であるとき，混乱を避けるために各 σ_i は ℓ 次元**小単体**と呼ばれる．



小単体の頂点となる点に対して $1, 2, \cdots, \ell+1$ という番号付けをおこなう．図では $1, 2, 3$ という番号付けである．

（番号付けに際しての約束）このとき，Δ の $\ell - 1$ 次元（以下のすべての）辺単体 $\overline{p_i \cdots p_j}$ 上にくる小単体の頂点に対しては必ず i または $\cdots$ または j という番号が付くようにする（上図）．それ以外の頂点には $1, 2, \cdots, \ell$ のうちどのような番号を付けても良いものとする（下図）．

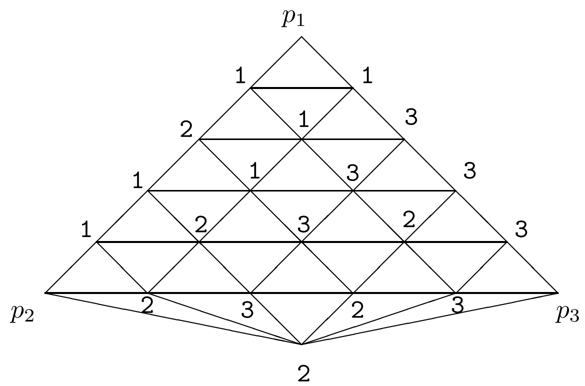


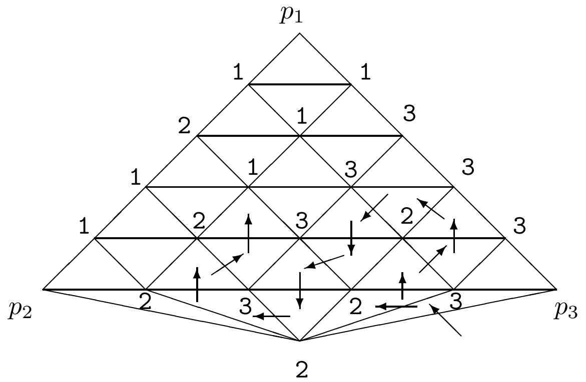
このとき，$1, 2, \cdots, \ell$ という番号が付けられた小単体 (completely labeled subsimplex) が少なくとも一つ（正確には奇数個）存在することが知られている（Sperner の補題）．

話を $\Phi : \Delta \to \Delta$ という写像にもどす．Δ の単体分割に属する小単体 σ の頂点 x は Φ によって $\Phi(x) \in \Delta$ に写されるが，このとき x の座標表現 $x = (x_1, \cdots, x_\ell)$ と $\Phi(x)$ の座標表現 $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \cdots, \Phi_\ell(x))$ とを見比べて，$\Phi_i(x)$ が x_i 以下になるような最初の i をもって，σ の頂点 x への番号付けとする．このような番号付けは上記の（番号付けに際しての約束）を満たす．

さらにこのとき $1, 2, \cdots, \ell$ という番号のついている小単体は，Φ の不動点の近似を与える．

従って不動点の近似をもとめることは，$1, 2, \cdots, \ell$ という番号のついている小単体を見つけだすことに帰着する．





Scarf のアルゴリズム (c.f. (Scarf, 1982))

4.6 補論２： Global Analysis

Debreu (1970) (Debreu, 1970)
Smale (1974a) (Smale, 1974)
Smale (1974b) (Smale, 1974)
Smale (1974c) (Smale, 1974)
Smale (1976) (Smale, 1976)
Mas-Colell (1985) (Mas-Colell, 1985)

4.7 補論３：選好が non-ordered の場合

一般的選好についても，厚生経済学の第一，第二基本定理，均衡の存在定理，といった一般均衡理論における基本的な定理のほとんどは（ほぼ満足のいく形で）成立している．

詳細については述べるスペースが無いが，以下，非常に雑な議論で，その大まかな感覚だけを伝える.（文章中で多分とかあるのは，本当に多分であって，私もまだきちんと確かめたわけではない．興味のある人は，自ら確かめてみられると良い.）

4.7.1 non-ordered の場合の第一基本定理について

$\hat{X}_i = \{x_i \in X_i | \, (z_j)_{j \in I} \in F, z_i = x_i\}$ と定義する．

Assumption 4.13 $\forall i \in I$ について，任意の 2 つの $x, x' \in \hat{X}_i,$ に対して，ある $z \in X_i$ が存在して，$z \succ_i x$ かつ $z \succ_i x'$ となる．

上の仮定と Debreu の I, II (X_i が凸であり，かつ $x' \succ_i x$ ならば $\forall t \in (0,1)$, $tx' + (1-t)x \succ_i x$) があれば，推移性および完備性は不必要となる（多分）．

上の仮定をさらに一般化して,（少し形は悪いが）次の仮定の下で，推移性は（多分完備性も）不必要となる．

Assumption 4.14 $\forall i \in I$ について，選好の非飽和点 $x \in \hat{X}_i$ と $x' \in \hat{X}_i$，$x' \sim_i x$ を任意にとるとき，$x' \in X_i$ の任意の開近傍 U（ X_i open ）に対して，ある $z \in U$ が存在して，$(z, x) \in \succ_i$ かつ $(z, x') \in \succ_i$ とすることができる．

上よりも少し強い（？）が，形としては良い次の仮定でも良いかもしれない．

Assumption 4.15 $\forall i \in I$ について，任意の選好の非飽和点 $x_i \in \hat{X}_i$ において，$X_i[x_i \precsim_i] = \mathrm{cl}\, X_i[\succ_i x_i]$ が成り立つ．

4.7.2 non-ordered の場合の第二基本定理について

先の定理 4.7 の証明中，脚注に記した通り．

4.7.3 non-ordered の場合の均衡の存在について

Shafer and Sonnenschein (1975), Gale and Mas-Colell (1975) 等が基本的文献である．特に前者は短いのですぐに読め，必要な知識も対応の連続性についてのきちんとした議論ができる程度である．

特に均衡の存在に関しては，一般性において犠牲にするものが無いのみならず，証明の簡潔さにおいても non-ordered の方が整理されているところもあるので，抽象経済などでは non-ordered で議論するのがむし

ろ通常になっている．(c.f. Urai (2000), Urai and Hayashi (2000) 等の，更なる一般化の方向もある．前者は non-ordered に限らず，この章の関連分野におけるその他の重要文献をかなり網羅しているので，参照されたい．)

4.7.4 non-ordered の場合のその他の議論

例えば core equivalence, Social Choice における Walras 対応の特徴付け，といったものの non-ordered での議論があり得る．

4.8 補論４：一般均衡理論と部分均衡論（余剰分析と真の厚生）

REFERENCES

Debreu, G. (1970): "Economies with a finite set of equilibria," *Econometrica 38*(3), 387–392. Reprinted in G. Debreu, *Mathematical Economics*, pp. 151-162. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

福尾 洋一・他 (1996):『経済学理論の基礎』 八千代出版, Tokyo.

Gale, D. and Mas-Colell, A. (1975): "An equilibrium existence theorem for a general model without ordered preferences," *Journal of Mathematical Economcs 2*, 9–15. (For some corrections see *Journal of Mathematical Economics*, vol. 6: 297–298, 1979.).

Grandmont, J. M. (1977): "Temporary general equilibrium theory," *Econometrica 45*(3), 535–572.

Mas-Colell, A. (1985): *The Theory of General Economic Equilibrium: A Differentiable Approach.* Cambridge University Press, Cambridge.

Neuefeind, W. (1980): "Notes on existence of equilibrium proofs and the boundary behavior of supply," *Econometrica 48*(7), 1831–1837.

Nikaido, H. (1968): *Convex Structures and Economic Theory.* Academic Press, New York.

Scarf, H. (1982): "The computation of equilibrium prices: an exposition," in *Handbook of Mathematical Economics, Volume II*, (K. A., J. and M. I., D. ed) , North-Holland, New York.

Shafer, W. and Sonnenschein, H. F. (1975): "Equilibrium in abstract economies without ordered preferences," *Journal of Mathematical Economics 2*, 345–348.

Smale, S. (1974): "Global analysis and economics IIA: Extension of a theorem of Debreu," *Journal of Mathematical Economics 1*, 1–14.

Smale, S. (1974): "Global analysis and economics III: Pareto optima and price equilibria," *Journal of Mathematical Economics 1*, 107–117.

Smale, S. (1974): "Global analysis and economics IV: Finiteness and stability of equilibria with general consumption sets and production," *Journal of Mathematical Economics 1*, 119–127.

Smale, S. (1976): "A convergent process of price adjustment and global Neuton methods," *Journal of Mathematical Economics 3*, 107–120.

Urai, K. (2000): "Fixed point theorems and the existence of economic equilibria based on conditions for local directions of mappings," *Advances in Mathematical Economics 2*, 87–118.

Urai, K. and Hayashi, T. (2000): "A generalization of continuity and convexity conditions for correspondences in the economic equilibrium theory," *The Japanese Economic Review 51*(4), 583–595.

【静学的一般均衡理論についての問題】

Exercise 4.1 （$\star$）I を任意の集合とする．全ての $i \in I$ について X_i を前順序 $\precsim_i$ の入った集合とし，集合 $F \subset \prod_{i \in I} X_i$ 上の関係 $\precsim$ を，各 $x = (x_i)_{i \in I}$, $x' = (x'_i)_{i \in I} \in F$ について, $(x \precsim x') \iff (\forall i \in I, x_i \precsim_i x'_i)$ と定義するとき，$\precsim$ は F 上の前順序であることを示せ．さらに，attainable state $((x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J})$ が Pareto-optimal であることと，そこにおける $(x_i)_{i \in I}$ が F の $\precsim$-maximal element であることが，同値であることを示せ．（A4 用紙 1 枚以内.）

Exercise 4.2 （$\star\star\star\star$）選好 $\precsim_i$ を任意の binary relation として（ $\precsim_i \subset X_i \times X_i$ のみを仮定し，reflexivity, transitivity, completeness 等一切仮定せず，$\succ_i$ をうまく定義して）パレート最適の定義ならびに消費主体の最大化問題を拡張せよ．また，その拡張された定義の下で，定理 4.4 および 定理 4.7 の対応物を導け．

Exercise 4.3 （$\star\star\star$）$\Delta = \{p = (p_1, \cdots, p_\ell) | \sum_{k=1}^{\ell} p_k = 1,\, p_k \geqq 0,\, k = 1, \cdots, \ell\}$ を定義域とする超過需要関数 $z(p) = (z_1(p), \cdots, z_\ell(p))$ がワルラス法則を等式で満たす連続関数であるものとする．

(i) 均衡価格 $p^* = (p_1^*, \cdots, p_\ell^*)$, $z(p^*) \leq 0$ の存在を証明せよ．

(ii) 均衡において，いずれかの財の価格が 0 となることはあり得るか．あるとすれば具体例を，ないとすればその証明を与えよ．

(iii) 均衡価格の集合 $\{p^* \in \Delta | z(p^*) \leq 0\}$ が Δ の閉部分集合であること（従ってコンパクト集合であること）を証明せよ．またそれを用いて,「全ての均衡が local に unique であること（ p^* が均衡価格であるとき，p^* のある近傍において均衡価格は一つしかないということ）を仮定すれば，この経済の均衡は高々有限個である」ことを証明しなさい．

Exercise 4.4 （$\star\star\star$）A および B という二人の消費主体によって構成される単純交換経済において，主体 A の効用は A の消費量と B の効用水準に依存し，同時に B の効用は B の消費水準と A の効用水準に依存するという．このような経済において，最適な資源配分状態が存在するための条件を述べよ．

5　動学的一般均衡理論

5.1　動学的経済モデルにおける主体の行動

5.1.1　動学的理論

仮に現実の世界を単位物理特性，単位地域，単位期間から形成される商品世界とみなすとしても，前節までの静学的分析は「すべての主体が，考慮されている商品のすべてを，現在考慮されている単一の市場の中で自由に売買できる」という想定で語られたものであった．Hicks (1939) の言う「静学的理論とは経済学理論のうち時間が本質的な意味を持たない部分」を，Debreu (1959) の立場から表現すればそのようになる．現実の社会においては，単位期間の連なりの中様々な商品が出現し消滅する時間の流れとともに，我々にとって交換・生産・売買可能な商品種類と量も（全商品空間の部分空間として）変化していく．そういった事実をきちんとモデル化しようとすれば，我々は各時点におけるそのような（交換可能な）商品空間の部分空間 —これを各時点における**市場 market** と呼ぶ— を想定し，動的な経済像をそういった market の連鎖として描くことになる．仮に日付ごとに market が存在するとしたら「今日の市場」「明日の市場」「あさっての市場」... という連鎖を考えるということである．

5.1.2　日付・出来事

さらに難しいことを言えば，動的な経済像をモデル化するにあたっては，今日と基本的設定の変わらない明日がいつまでも続くといった都合の良い想定に基づく場合を除くならば,「今日の市場」「明日の市場」「あさっての市場」... という単純な「日付に基づく市場概念」では不十分である．それは，通常の経済理論においては捨象されており，それでいて経済理論そのものに相違をもたらす，経済学から見れば外生的な要因が，時間の流れとともに様々な可能性をもって変化することを考慮せねばならないからである．例えば,「明日，とある新商品が市場に登場するかもしれないし，しないかもしれない」という事態を，どう表現すれば良いか．あるいは「雨の場合と晴れの場合で欲しいものが変わってくる消費者」をどう記述するか．もしくは,「気温が高けば収穫量が増え，低ければ減るような農作物により生計をたてる農家」をいかに記述するか．商品種類，選好，生産技術といった，経済理論の中で所与としているものが，実際には様々な可能性を持って将来の外生要因に依存し，開かれているという事態を（完全では無くとも）多少なりとも記述したいのであれば，すでに単純な「日付け」観だけでは不十分である．このために通常用いられる方法が，経済の**状態 state** という概念であり，**date-event 日付-出来事**という考え方でもって商品を特徴付ける方法である．

5.1.3　状態・不確実性

この状態 state 概念は必ずしも時間の経過ということと連係させる必要は無く，たとえ現在時点のみにおいても（従って静学的枠組であっても）主体にとって「（本来はモデル上の設定として）分かっていなければならないことの中に，分かっていないこと（不確実性 uncertainty）が存在する」場合に，その「分かっていることと分かっていないこと（情報 information）」を表現する手段として用いられる．

この考え方の背後にあるのは，世界（人間社会というもの）について，人間各個人の思考や認識から独立しているという意味で，我々にとって「客観的」に眺めることのできる「互いに異なり，全てを尽くすような，いくつかの可能な状態」なるものがある，という前提である．そのような集合上の主観として不確実性を表現することが適切な場合もあれば，均衡概念とあいまって逆説的な結論を導く場合もある．

上記のような（暗黙的）前提の善し悪しはともかくとしても，通常我々が取り扱う理論において，その理論体系の中では説明されない，それでいてその体系内の重要な変数に影響を与える，そういった様々な要因が存在することは誰にも否定できない．そしてそれらを state という概念によって外生的に取り扱うことは，今日非常にポピュラーな接近法であり，常識として避けて通れないものである．

対象としている期間が，今期から数期にわたるものとする.（別に無限期にわたっても構わないが，ここでは単純化のため有限期としておく.）1 つの state とは，今期からその議論の対象とする数期にわたって，上に述べたような「体系の外的要因」がどのように移り変わるかという，体系の外的要因の一つの有り方（いわば 1 つの歴史），のことである．これを図で表すため，Figure 1 のような tree を考える．

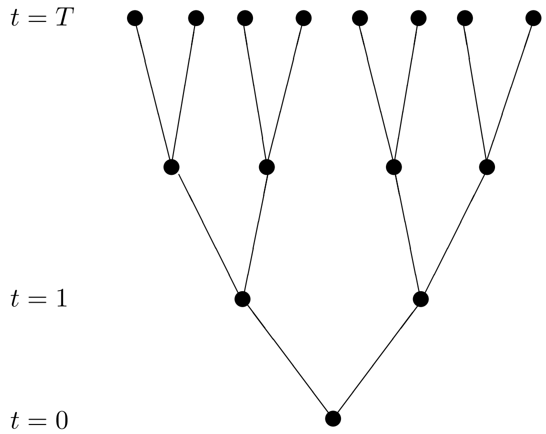


Figure 1: Event Tree

縦方向は日付を表し，枝別れは体系の外的要因の可能な有り方（簡単のため有限とし，図では特に各日付の移り変わりごとに 2 としてある）を表す．最終的な枝別れの数（図では，最終期である T 期における本数である 8 本）が state の数に他ならない．各枝に $s_1, s_2, \cdots, s_8$ と名前をつける（つまり各 state に名前をつける）と，$S = \{s_1, s_2, \cdots, s_8\}$ が state の全体を表す集合である．

state の集合（図で言えば，枝のまとまり）を event と呼ぶ．枝別れの根元の黒丸は，各日付における可能な外的要因の有り方を表しているが，これを state のまとまり（つまり event）として見ることができよう．したがって，各黒丸に日付と event で名前をつけることができる．以後，各黒丸を，date-event (t, A),（ただし，t は日付を，$A \subset S$ は event をそれぞれ表す）などと呼ぶことにする．例えば date-event $(1, \{s_1, s_2, s_3, s_4\})$ でもって，図の下から 2 段目の左側の黒丸を表す．

商品を特徴付ける際に,（特徴，場所，日付）でなく,（特徴，場所，date-event）でもってしたものを，特に **条件付き商品 (contingent commodity)** と呼ぶ．このように商品の概念を拡張することによって，通常の（条件付きでない）商品概念にもとづいて行われた議論（例えば Debreu (1959), Ch.3 – Ch.6）や結論を，そのまま条件付き商品の世界にあてはめ、そのいくつかの議論を利用することが可能となる。(c.f. Debreu (1959), Ch.7)．例えば「競争均衡は Pareto-optimal な資源配分状態を導く（厚生経済学の第一基本定理）」などが，そのまま成立する.（もちろんその場合，後で述べるところの市場の完全性といった，“定理の成立のために必要な仮定” は，通常に増して厳しい要請となり, その結論の現実妥当性に関しては別途議論されねばならない.）

5.1.4　市場

このように商品概念（商品空間概念）を拡張した上で，先に述べた market の連鎖という意味での動学的な市場概念を記述する一つの方法を我々は手にすることができる．

ある日付（あるいは date-event ）において取り引き可能な商品の組み合わせの全体によって張る事のできる

（拡張された意味での）商品空間の部分空間を指して，その日付（ date-event ）における**市場 (market)** と呼ぶ．ある理論（モデル）において考察の対象となる market の全体を指して，その理論（モデル）における**市場構造 (market structure)** と呼ぶ.

● 実物市場．実物資産市場．名目資産市場．株式市場.（金融市場）

あるモデルにおいて，各主体が全ての商品に関する任意数量個の取り引きが可能であるとき，市場構造は完備である (complete) と言われ，そうでないとき不完備 (incomplete) であると言われる．ただし，モデルの設定上 state ごとの完全予見（実際に将来の価格が各主体により正確に予想されている）といったことが仮定されており，その予想に基づいて各人の計画が行われているため，そのモデルにおいては実際上それが可能である（計画段階でそうであるにすぎないのだけれど，実際にそれが実現される）という場合も含めて，市場構造は完備であると言われることも多く，今日，ファイナンス等の文脈で市場の完備性が云々される場合はほとんどがその意味である．

市場の完備性が重要とされるのは，それが最も自由度の高い選択を各消費主体に可能とする（従って経済全体として最適な資源配分状態を実現する可能性がある）からであるが，場合によってはより投機的な側面を市場に呼び起こす可能性も否めない．いずれにせよ，純粋な経済学理論の観点からして，不完備市場の均衡理論は，ファイナンス理論との関連をも持った，今日の最重要テーマの一つである．

● 裁定取り引き

● 期待効用

5.1.5　静学理論の限界としての投資・貯蓄概念

静学的理論において述べた事は，要するに選好と消費集合ならびに技術と商品の価格が明確に与えられれば，全ての主体の行動が決まる，ということであった．現実の企業なり消費主体はしばしば将来の（つまり現在の市場では取り引きが許されてない）商品を意識し，そういった商品に向けて行動（計画）をとる．将来にわたっての技術はそもそも明確でないし（これは state の数が多くてそれに見合うだけの市場 — 商品概念 — が存在していないものと見れば，市場の非完備性に帰着する），先々までの市場が存在してないために価格も明確でない．それでもなお現実の生産主体は，不確実な将来に向けた生産行動をとる．例えば，先物市場が存在していない状態でありながら，その産出に複数の単位期間を要する商品を産出する場合，あるいは必然的に先物市場も存在せず技術的にも不明確な先々の商品まで産出せざるを得ないような生産行動（住宅等建造物の生み出すサービス，機械設備の生み出すサービス等），今売ることもでき，先物市場もあるとしても，あえて保蔵して来期に売るといった価格変化を見越しての投機的な生産（保蔵）行動，などもこれに当たる．

生産主体の “将来に向けての生産行動” すなわち “**来期以降の商品を生産するために，その生産主体によって今期投入された商品（あるいはその金額）**” を指して，その生産主体による**今期の投資（額）**と呼ぶ.[26] 従って投資が実際に行われる（経済的な取り引き結果として実現可能である）ためには,（リターンが未だ実現されていないところの）その投入物に対して支払うべき金額をとりあえず今期まかなう資金提供者（株主，社債の購入者，銀行など）が存在せねばならない．例えある生産主体にとって将来の様々な state ごとの価格に関する予想が明確にできている（間違いでも良いから）としても，同じ予想がその他の主体，特にその生産主体への資金提供者となりうるところの主体達（オーナーである株主，社債を購入する主体，銀行など）においてもな

[26] これは完全に粗 (gross) 投資の概念である．一般均衡理論では通常は資本とされるようなものまで日付けされた商品として扱う場合がある—例えばトラックを所有していることを，今期のトラックと，今期のトラックから来期のトラックを製造する技術を保有していることとして扱うことがある—ので，上のように今期のインプットをもって全て今期の投資と呼ぶ場合に，通常の「今期の投資」概念と整合的にするにはそういった「資本」の減耗率を１００％と考えなければならない．

また，それが厳密に定義可能であるためには今期の生産のための投入物と，来期以降の生産のための投入物とが厳密に区別できる必要がある．今期の投入物が今期の産出物と来期以降の産出物の両方に影響を与えうる一般的な生産技術に基づく場合，そのような区別を与えることはかなり困難であろう．しかしながら，あえて上のような投資概念を用いることは，いわゆる “事後的な意味” での投資ではなく，事前に “意図された” 投資というものを表現する上では不可欠である．また，ここで生産という言葉は非常に厳密な意味で用いられている．例えば，商品の在庫は来期首の商品を産出する目的で今期投入された商品という意味で，ここでいう投資の範疇に入る．

されている，ということは通常期待できない．ここに,「企業が社会を動かす」という資本主義システムの現実的側面と，あくまで個人（消費主体）に基づいた社会像を描きたい経済学理論との溝を垣間見ることができる．

我々が前節までで与えた消費主体中心の静学的理論は，このような現実（動学的構造）を記述する上での何らかの指標となりうるのであろうか．もちろんその答は，今日の経済学における多くの努力,(例えば，非完備市場における企業の目的関数，企業の創設や倒産の記述，貨幣および貸借を含んだ一般均衡理論，一時的一般均衡理論と企業の予算制約式，等）に依存している．その中で，静学的生産主体の理論が，いくらかの限定の下で動学的問題の記述指標となりうるものであることも確かであるが,「静学的立場に固執する限り，決して解決され得ない問題」が存在することも確かなのである．

静学的立場はどの程度動学的問題に適用可能だろうか．生産主体の「投資」行為は，明らかに “時間” という概念が本質的な意味を持つ（一つの market の中で閉じていない）「動学的」問題であり，我々が前節まで扱って来たのは基本的に “時間” 概念を捨象して考え得る（一つの market において閉じた）「静学的」問題であった．しかしこれは生産主体の行動において，

> “新古典派成長モデルのように，各期の生産行動が各期で閉じているような場合を論じている”

のだと考えることはできる．あるいは,

> “全ての Date-Event にわたって市場が存在するような理想的状況（または stationary economy などで，先々の価格がほぼ予見できるような，それに近い状況）の下で，複数期間にわたる生産主体行動についても（ある程度）包括的な議論をしている”

と考えても良い.（それでも計画期間が有限期である限り，投資を繰り返すことによって発展する企業の表現にはなっていない.）

一方で，我々が静学的な立場（完全与見下の完備市場を含む）を取る限り,「投資」にまつわる資金調達能力ということは一切問題となり得ない.（完全与見均衡において，あらゆる投資は state ごとに確実なリターンを持つ．市場が完備として，そういった投資は明確に額面の定まった資産にすぎず，その意味で確実な投資の資金提供者を探す必要は全くない．投資はもはや，今期の生産のための今期の投入物と何ら区別する必要が無くなる.）逆の言い方をすれば，これによって我々は非常に単純に “生産” および “生産主体” を（時間の流れの中でさえ）とらえる事が可能になったのであった．[27] 次節では簡単な例を用いて，この限界をもう少し詳しく見る．中で用いられている「一時的一般均衡」や「完全与見均衡」の概念は，後のセクションでより詳しく論じる．

5.1.6 動学的モデルにおける生産主体行動：一つの考察

前節で述べた「投資」概念が生産主体の “将来に向けての生産行動” である以上，個々の投資を決定するのは企業である．すなわち “**来期以降の生産に用いる目的で，その生産主体によって今期投入された商品（あるいはその金額）**” を指して，その生産主体の**今期の投資（額）**と呼ぶ.

簡単のため，state の数は 1 として，名目資産が存在するものとする．[28] ある期の市場に直面した生産主体 j の動学的な企業行動は，その期（以下 t 期と呼ぶ）の直物商品に関する産出投入行動 $y(t)$ （t 期における t 期直物商品の産出が正，投入が負で表されているベクトル）と，直物市場における売買行動, $z_{t,t}$ （t 期における t 期直物商品の売りを正，買いを負で表したベクトル）および先物実物資産市場における売買行動, $z_{t,t+1}, z_{t,t+2}, \cdots$ 等（t 期における $t+1, t+2, \cdots$ 期直物商品の売りを正，買いを負で表したベクトル），そして先物名目資産

[27] 今日の経済学では，経済動学という言葉がこの単純化された意味でのみ用いられているようである．このことは，たとえそれが現実と異なるにしても，一つの「理想的状態」として認め得る，ということが暗黙的な信仰としてはびこっているからである．事実それは合理性の何たるかについての誤解であり，かつてケインズなどによって否定されたものの蒸し返しに他ならない.

[28] したがって，市場は完備である.（ただし完全与見は必ずしも仮定しない.）このようにするのは，企業の投資行動が新たな資産を作ってしまうことからくるやっかいな問題を回避するためである.

市場における売買行動, $w_{t,t+1}, w_{t,t+2}, \cdots$ 等（$w_{t,u}$ は，t 期における u 期の名目勘定の売り[29]を正，名目勘定の買い[30]を負で表した実数）によって記述される．物理的制約として，これらは次の二つの式を満たすことが必要である．

（技術的制約）$y(t)$ は，将来にわたる可能な生産計画 $y = (y(t), y(t+1), \cdots) \in Y_j$ の一部をなす．

（実物契約の履行）$y(t) = z_{t,t} +$（ t 期の直物に対する過去の売買契約）

上でいうところの過去の売買契約とは，$z_{t-1,t}, z_{t-2,t}, z_{t-3,t}, \cdots$ 等（がもしあったとすればそれら）によってすでに決定されているものの総計である．節の最初に述べた生産主体 j の t 期における投資行動は，上の変数 $y(t)$ の中に隠れている．

同時にこのとき，生産主体 j は今期に許された直物市場での売買額 $p \cdot z_{t,t}$，先物市場での売買額 $p \cdot z_{t,t+1} + p \cdot z_{t,t+2} + \cdots$（実物資産），$w_{t,t+1} + w_{t,t+2} + \cdots$（名目資産），と今期の期首の株主に対する今期の配当 $r(t)$, ならびに t 期の名目勘定についての過去の契約 $w_{t-1,t} + w_{t^2,t} + \cdots$，に関する以下のごとき予算制約式（**企業の予算制約式**）を満たさねばならない．

（予算制約式）$r(t) + \cdots + w_{t-2,t} + w_{t-1,t} + p \cdot w_{t,t+1} + p \cdot w_{t,t+2} + \cdots = p \cdot z_{t,t} + p \cdot z_{t,t+1} + p \cdot z_{t,t+2} + \cdots$

（共通の p が用いられているのは，p が先物市場（実物資産および名目資産）を含めた十分大きな次元にきちんととられており，$z_{t,\cdot}$ 等は自らの関るところ以外に 0 を付け足したベクトルとして解釈されているためである．左辺の最初の $\cdots$ は，過去における今期（ t 期）の名目勘定に対する契約（即ち過去の名目貸借契約で t 期を期限とするもの）が最高何期前からかわされていたか，に依存して決まる．左辺の二つめの $\cdots$ は，今期（ t 期）の名目勘定と交換される将来の名目勘定（即ち今期新たに取り交わされる名目貸借契約）が最高何期先まで許容されているかに応じて決まる．また式の最後の $\cdots$ は，今期における商品の先物契約が最高何期先のものまで存在しているかに応じて異なる.[31]）ここで,「資産市場における無名性」が想定されている．つまり企業 j はその他企業（もちろん個人も含めて）と何ら区別されることなく資産市場に参加して，資金を調達することができ，必要とあらば（万人に適用される利率で）無尽蔵に借り入れを行うことができる．

企業の目的は各期利潤 $r(t)$ の流列を何らかの意味で最大化することにある．そのための生産計画を実行する上で，いかに危なっかしいプロジェクトであろうとも，いかに安全なものであろうとも，資金の調達しやすさが全く変わらないと言うのは，明らかに現実の重要な側面を捨象していると言わざるを得ない．すなわち投資行動を含めた生産主体の動学的生産行動を本当に扱いたいのであれば，その生産主体の "信用度" とか "資金調達能力" といったことを問題にせねばならない．しかしながら，完全与見均衡の概念はこの非現実的状況の解決に向けて何ら役立たないどころか，それを正当化するばかりである．

こういった状況を打開する一つの非常に自然な方法は，上のような名目資産を各企業の社債といった形の（無名性を排除した）ものに変え，さらに各主体による債務不履行 default の可能性をモデル内に導入することである．先に紹介した Zame (1993) や Dubey et al. (1990) などでなされているのは無名性の下での default であるが，資産売買への無名性をはずしながら default を扱う場合，予算制約式の非凸性など困難な問題に取り組む必要が生ずる．

さらに，そういった無名性の排除にともなって，ある投資プロジェクトを支える主体とその主体自身の利害関係が，複雑な問題を生ずる可能性がある．簡単に言えば，一人の消費者による投資を考慮してみれば良い．形式的には，その消費者一人を owner とする企業を仮に想定することで（そのような仮想的企業の投資，あるいはそのような新企業の誕生ととらえることで）通常の企業のプロジェクトの評価問題に帰着させることは可

[29]すなわち u 期に $w_{t,u}$ という名目額を市場に供給するという契約

[30]すなわち u 期に $w_{t,u}$ という名目額を市場から受け取るという契約

[31]簡単のため，企業による株式保有（およびそれに伴って他の企業から受け取る配当）は考慮していない．また，先物の先物契約（あさって 100 万円返す約束であす 99 万円借りることを，今日契約する，といったもの）も簡単のため考慮していない．もちろんそれらは，ここでの議論上本質的な問題ではない．

能であるが，その場合その企業家としての個人と，もともとの消費主体としての個人の利害が一致しないとすればどうなるか，という（これは寡占均衡などでも出現する「企業の目的」に関わる）やっかいな問題をもたらす．

通常一つの企業には複数の owner あるいは資金提供者が存在することを考慮するならば，問題はより複雑である．生産主体は来期以降の “技術” あるいは “価格” について独自の “予想” をもって行動せざるを得ないのだが，それは，たとえある生産主体がそういった将来に関する予想を持ち，そしてその予想に基づいて何らかの「投資」計画を立てたとしても，同じ計画がその生産主体にとっての多くの資金提供者（新旧の株主，社債を購入する主体，あるいは貸付を行う銀行など）の目にも適切と見えるかと言えば，それは分からない．その場合，企業はどのタイプの資金提供者の利益を立てて，どのような計画を実際に実行にうつすのだろうか．[32]

さて，いろいろとやっかいな問題はあるにせよ，ともかく完全与見から離れ，各主体の異なる将来見通しなどを考慮し，さらに上に述べた無名性の排除（上で述べた社債，あるいは新株発行なども有り得る），default の考慮，といったことがうまくいったとして（たとえば複雑な一時的一般均衡モデルなどによって）描かれた社会像について，考えてみよう．生産主体がいかなる投資計画をたてようとも，（投資が産出として実を結ぶのはあくまで来期以降であるから，）今期の投資をまかなう資金提供者が存在しない限り，そのような計画が実現可能でないことは当然である．「投資」は，今や確実な利益を生む投入物とは違い，将来に向けての不確実な投入物でしかない．従って，誰がその資金を提供するか（いわば誰がその不確実性にまつわるリスクをかぶるか）ということが，問題になってくる．そこで生産主体はその「投資」計画を実行するための資金提供者を，経済の内に募る．もちろん “資金を募る” といっても，その行動は経済理論的には**社債や株式，将来商品の先物といったものを売買する「資産市場」における取引**として記述される．もしも資金が社債によってまかなわれたとすれば，そのような投資計画のリスクは社債の購入主体が請け負ったものと考えることができる．もしも新株式の発行によってまかなわれたならば，投資計画は今期末の新株主らによって認められた（その株式が売買された価格でもってリスクを請け負われた）ということになろう．もしも投資資金が内部留保（旧すなわち今期首の株主に配分せずに残した利潤）でもってまかなわれたならば，（本来手にする権利を持つところの利潤の一部を受け取らないことによって）リスクは旧株主（今期首の株主）によって請け負われているということになる．いずれにしても，このような不確実性下の生産主体行動は，単なる利潤最大化問題に加えて，各期の「資産市場」において直面する各生産主体の “資金調達に関する制約”（**生産主体の予算制約式**：それが意味を持つには無名性の排除と default のリスクといったこと）を考慮してはじめて生きた形で取り扱われるものと言えよう．

もちろん上に述べたことは出発点でしかない．「資産市場」は，人々が今期の所得を含めた自らの期首の資産の中から，「貨幣」や様々な「債券」あるいは「実物資産（あるいは株式）」といった期末資産の形態に対して，どれだけずつを振り分けるか（来期に残すか），を決める市場である．異なる期末資産形態への人々の選好は，不確実な将来に対する人々の予想にかかっている．従って資金提供者の側から見れば，ある生産主体に資金を提供するか否かという問題は，その生産主体の将来性をいかに評価するかという（単に default 率といったことだけから判断されるのではない）総合的な問題にほかならない．すなわち “各生産主体の資金調達に関する制約” というのは本来（確実な価格を与えられた場合の消費者の予算制約式のように，ある生産主体を取り出してきたときに，単にその生産主体だけを眺めて決まってくるようなものではなく，）その生産主体が属する社会全体の行動に依存する形で（例えば，他の生産主体の投資計画，資産状況ごとに，ある生産主体への制約が変わってくる，といった形で）はじめて決まってくるものなのである．（例えば銀行の融資などは，明らかにそういった側面に依存している．）「資産市場」をきちんとモデル化し，そのもとでの生産主体（消費者も同様である）の行動を記述分析することは，通常その最も単純な形においてさえかなりの困難を伴い，完成しているとは言い難い．ましてや，銀行による貸付や，生産主体間での株式の持ち合い，といったものを考慮に入れるとなるともはや，“そういった社会全体の行動様式を一体どの程度まで考慮すべきか” ということに関してさえ

[32] ここまでの 2 段落で述べたいわゆる「企業の目的」という問題は，個人における「合理性とは何か」という問題と同じく，今日のミクロ的な世界観における一つの限界を示しているように思われる．

定説など存在していないというべきである．

いわゆる "マクロ経済学" においては "貨幣市場"（「資産市場」の一部）や "生産主体による投資" の概念が分析のまさに中心的道具となる．言うまでもなくそのような "マクロ経済学における中心概念" に対して，その基礎となりうるミクロ的概念が確立していないというのは問題のようにも見える．しかしながら,「貨幣」や「貸付」といった問題は，そもそも「不確実性」あるいは「予想」と言った問題がそうであるように，どこまで精密なモデルをつくるかということについて，いずれどこかで妥協せざるをえないという一面を持っている．例えばどこまでを「貨幣」と呼ぶのが適切かという「貨幣」の定義がそうであるし，また様々な種類の「貸付」のタイプについてどこまでを考慮すべきかという問題もそうである．そういった意味では,「資産市場」にまつわる諸概念はそもそもがマクロ的視点を必要としているのだと言えるかもしれない．実際，ありとあらゆる社会的な制度がミクロ的基礎をもっているなどということは，望むべくもないことである．

5.2 不完備市場の一般均衡理論

5.2.1 状態と資産

簡単のため，全ての主体の関心を今期と来期の 2 期のみに限定する．

今期と来期を通した経済の状態数が 1 でしかないとき，今期の市場において（来期の購買力を確保するための）資産が 1 つでもあるならば（名目資産，実物資産を問わず）今期および来期の価格に対する何らかの想定の下で（ただし実物資産の場合，来期のその商品の価値が 0 であるという特別な想定ケースを除いて）あたかも今期と来期の全ての商品の自由な売買契約が可能であるかのごとくに，個別主体の消費・生産計画をたてることができる．[33]

一般に経済の状態数が $S > 1$ であるとき，相異なる K 種類の資産が今期および来期の価格に対する何らかの想定の下で（先と同様，実物資産の場合，価格想定によっては来期の価値が 0 になったり複数の資産が来期の額面上は同一のものになったりしてしまう特別なケースを除くならば）やはり 2 期間の全ての商品に対する自由な売買計画が可能となる．[34]

来期に持ち越すことのできる購買力を表現するのに，$S \times K$ の配当マトリックスがしばしば用いられる．上のような市場の完備性は，その市場の共通認識となったある価格下の配当マトリックスのランクが S であるということでもって表現される．

5.2.2 一時的均衡アプローチ

各主体がそれぞれ独自の予想をおこない，その下で各期の一時的な市場均衡だけを扱う．そういった短期的な市場均衡の連鎖として，経済の動的な流れを見る．(代表的文献： Grandmont (1977).)

5.2.3 完全与見アプローチ

全ての主体が同一の予想をおこない，しかもその予想が（各 state ごとには）的中しているような均衡を扱う．現在時点から見れば，state ごとに将来の計画まで含めて現在で決まってしまっているので，静学的な均衡概念を，そのまま経済の動的な流れとして読みかえることができる．(代表的文献： Radner (1972), Duffie and Shafer (1985))

---

[33]【名目資産】来期の価値基準財（貨幣）の一定量を，今期の購買力と引き替えに確保するような契約．1 期間の銀行定期預金，社債，個人の借用書などをイメージせよ.【実物資産】来期の商品（組）の一定量を，今期の購買力と引き替えに確保するような契約．いずれも債務不履行（default）の危険を伴うが，default の入ったモデルは現状でも未完成である．(c.f. Zame (1993), Dubey et al. (1990), etc.)

[34]第 1 節でも述べたように，これを指して市場の完備性と言うこともある：名目資産であれば，もちろんこれは購買力を各状態ごとに計画通り持ち越せることを意味するが，実物資産の場合は価格予想が当たらない限りそのことは保証されない．また名目資産の場合であっても，来期の価格が的中していなければやはり計画通りの消費は不可能なので，本来の市場の完備性の意味Debreu (1959) からすれば強すぎる言い方である．しかしながら完全与見アプローチの下では同じになってしまうので，しばしばこの表現が用いられる．

5.3 合理的期待および合理的期待均衡

上述した完全与見的均衡が，しばしば合理的期待均衡と呼ばれることがある．合理的期待均衡という考え方は，[35] **合理的期待形成仮説**すなわち「個人は将来の予想の形成においてできる限り合理的に，すなわちその時点において可能な限り信頼に足る科学的結論（経済学理論を含む...）全ての利用可能な情報を最大限に利用する」ということを背後に，さらに進めた均衡概念であって

> 「一つの経済学理論モデルにおいて，その中で描かれる主体は，本来そのモデルそのものを知り得る存在であり，したがって，そのモデルにおける均衡というものは，かりにそのモデルのすべての主体が，それが均衡であると知ったとしても影響を受けないようなものでなければならない」

という発想に基づく.（これは経済学理論がそのようなものであって欲しいという経済学者の「願望」と，実際に社会がどのようなものであるかという「事実認識」がいささか混同されたきらいのある均衡概念であって，もしも現実の人間社会においてそのような事が顕著でないとすれば，実は最も現実から解離した均衡概念にさえなり得るものである．[36]）

完全与見均衡は，仮にその均衡（将来も含めて）が全ての主体によって前もって予想されても何ら影響を受けないのに対して，一時的均衡は将来の均衡が与えられたとき，各人がそれと異なる価格予想をおこなっていることが「おかしい（非合理的）」ということになる.（経済モデルが常に完全なものではありえないということを各人が自覚しているなら少しも「おかしく」ないのだが.）

ただし，経済の現実問題の中にそういう側面が無いとは言い切れない．それはまさしく「我々の意志が経済の動向を決める」という，非常に重要な一面を描出するものかも知れないのである．個人の情報の問題に関連させながら，この問題を一般均衡理論的に展開したのが Radner (1979) である．先の「状態・不確実性」の節で考慮した前提で，社会の状態の集合 E を考え，さらにそれに関する個人の持つシグナルの集合 S というものを考える．各シグナル $s \in S$ は個人を $i = 1, 2, \ldots, m$ として $s = (s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_m)$ という個人シグナル s_i の積の形をしている．各主体が知り得るのは個人シグナルのみとする．$s \in S$ と $e \in E$ の関係が，各主体 i において $E \times S$ 上の確率分布 P_i として与えられており，この P_i は価格を与えられれば，期待効用＋利潤最大化といったことにより，各人の行動パターンを導出可能なものとする．

全ての主体はこのモデルを知っているので，上のような想定の下で各 $s \in S$ ごとに価格に対する他者の行動が計算でき，特に均衡価格 $p(s)$ が計算できる．ところが，そういった均衡価格 $p(s)$ に対して，逆に各人の持っている情報 s_i を逆探知できる（例えば 1 対 1 なら）ことを考慮すれば，場合によっては主体 i が s_i 以上の情報を得ることになる．そのことから影響を受けないような均衡が，合理的期待均衡である．

> （例）人間 5 人．1 人は風邪薬と食物を持っており，他の人は食物だけを持っている．また，1 人は医者である．state は "全員風邪をひいている" か "全員風邪をひいていない" かの 2 種．シグナルは医者にとっては自分の喉を見て "腫れている" か "腫れてない" かの 2 つ（腫れていればもちろん風邪であることが医者には分かる）．残りの主体は自分で自分の喉を見ても何も分からないということで 1 シグナル．このとき，合理的期待均衡は，医者のみが受け取る 2 種類のシグナルに応じて，全員が風邪をひいており薬を買う（薬が高価になる均衡）と，全員が風邪をひいておらず薬を買わない（薬が安価になる均衡）の 2 つだけであり，それ以外は無い．医者以外の 4 名は，医者しか知り得ない風邪であるかどうかという情報を，均衡価格を通じてあたかも「知る」ことになる．

[35]合理的期待という言葉がはじめて用いられたのは Muth (1961) と思われる．そもそもの発想が「予想のモデル内への内生化」ということにあった．

[36]それでもなお経済学者がこの概念に未練を持つのは，例えば政策を開示し，かくかくしかじかの均衡を目標にすると表明した場合に，それでもなおかつ生き残るような政策たり得るものが「そういった均衡概念の中にしかない」ということによる．この願望は，願望とは言え切実なものである．この均衡概念の意味で「予想を内生化」しておけば，少なくともそれを社会の理想状態として提示された場合「持続可能」だということである.（ナンセンスは承知していても他にないからやっているとか，可能性として否定できないとか，そんなことなら止めておいた方が良い.）

REFERENCES

Debreu, G. (1959): *Theory of Value.* Yale University Press, New Haven, CT.

Dubey, P., Geanakoplos, J., and Shubik, M. (1990): "Default and Efficiency in a General Equilibirum Model with Incomplete Markets," Cowles Foudation Discussion Paper No. 773, Yale University.

Duffie, D. and Shafer, W. (1985): "Equilibrium in incomplete markets. I. A basic model of generic existence," *Journal of Mathematical Economics 14*, 285–300.

Grandmont, J. M. (1977): "Temporary general equilibrium theory," *Econometrica 45*(3), 535–572.

Hicks, J. (1939): *Value and Capital.* Clarendon Press, Oxford. 日本語訳: J . R. ヒックス『価値と資本』 岩波文庫, Tokyo.

Muth, J. F. (1961): "Rational expectations and the theory of price movements," *Econometrica 29*, 315–335.

Radner, R. (1972): "Existence of equilibrium of plans, prices, and price expectations in a sequence of markets," *Econometrica 40*(2), 289–303.

Radner, R. (1979): "Rational expectations equilibrium: Generic existence and the information revealed by prices," *Econometrica 47*(3), 655–678.

Zame, W. R. (1993): "Efficiency and the Role of Default When Security Markets Are Incomplete," *American Economic Review 83*(5), 1142–1164.

【動学的一般均衡理論の問題】

EXERCISE 5.1 （⋆）（⋆⋆）Hicks の Value and Capital (Hicks, 1939) の第 3 部における最初の 2 つの章を参考にして，自分なりに考えた，ある生産主体のある期における予算制約式というものを書いてみなさいその場合何か単純化している（と自分で思う）部分があれば，それが何かということも併記しなさい．

6　ゲーム理論

Von Neumann and Morgenstern ((1944, 1947, 1953))

6.1　協力ゲーム理論

6.1.1　結託・コア（TU Game）

Player の集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$（ここでは有限集合としておく[37]）に対して，I の部分集合（**結託 coalition** と呼ぶ）に定義された非負の値をとる実数値関数 $v : \Sigma \to R_+$（ここで Σ は I の部分集合全体からなる集合）が $v(\emptyset) = 0$ を満たすとき，v を（Player の集合 I 上の）**協力ゲーム**と呼ぶ．

協力ゲーム $v : \Sigma \to R_+$ が与えられているとき，Σ 上に定義された加法的測度 $\mu : \Sigma \to R_+$ （$\mu(\emptyset) = 0$ であり，$A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \emptyset$ ならば $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A + B)$ なるもの）を，そのゲームの**配分 allocation** と呼び，配分 μ が $\mu(I) \leq v(I)$ を満たすとき，それを**実現可能な配分 feasible allocation** と呼ぶ．

実現可能な配分 μ が，$\forall S \in \Sigma$ に対して $\mu(S) \geq v(S)$ を満たすとき，μ をゲーム v の**コア配分 core allocation** と呼ぶ．ゲーム v のコア配分の全体からなる集合を，ゲーム v の**コア core** と呼ぶ．

> 上で定義されているゲーム v およびコア概念は，一つの結託 A が与えられたとき，その結託全体として実現可能な実数値 $v(A) \in R_+$ にのみ着目しており，その結託内でさらにどのようにそれを分けることができるかについては触れていない．いわば，その合計量を自由に分配できるという想定の下で理解されているものであり，Games with Transferable Utilities (TU Games) と呼ばれる．

6.1.2　協力ゲーム理論と一般均衡理論（Non-TU Game）

本節では単純交換経済のみを扱う．生産を考慮した場合の議論が全く不可能というわけではないが，静学的一般均衡理論における企業の取り扱いが利潤を最大化する企業とその利潤の株主間への比例的配分という以上に踏み込んだ構造を描いていない以上，株主の結託が生産行動に与える影響を表現する自明と言える方法が存在しないので，ここでは扱わない．

【経済の Core】

単純交換経済 $\mathcal{E} = (X_i, \precsim_i, \omega_i)_{i=1}^m$ において，消費者の集合 $I = \{1, 2, \cdots, m\}$ の部分集合を coalition（結託）と呼ぶ．いかなる種類の結託を認めるかということは，議論によって異なるが，ここでは簡単のため全ての部分集合が許容された結託 (admissible coalition) であるものとする．経済 $\mathcal{E}$ において許容された結託のありかたの全体を $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ で表す．

経済 $\mathcal{E}$ における資源配分 $\{x_i\}_{i=1}^m$ が結託 $S \in \mathcal{S}(\mathcal{E})$ によって Block（あるいは improve on ）されるとは，S のメンバーが，最初に保有していた $\{\omega_i\}_{i \in S}$ を用いて，S に配分された $\{x_i\}_{i \in S}$ よりも望ましい状態を実現できること，厳密に述べると，

> (Block) ある $\{x'_i\}_{i \in S}$，$\sum_{i \in S} x'_i \leq \sum_{i \in S} \omega_i$ で，全ての $i \in S$ について $x_i \precsim_i x'_i$ かつ少なくとも 1 人の $i \in S$ について $x'_i \succ_i x^i$ なるものが存在する

ということを指す．許容されたいかなる coalition によっても block (improve on) されないような資源配分を指して，（コア資源配分）core allocation と呼ぶ．コア資源配分の全体を指して（単純交換）経済のコア (core of an exchange economy) と呼ぶ．経済 $\mathcal{E}$ におけるコア資源配分の全体を $\mathcal{C}ore(\mathcal{E})$ で表す．

[37] 協力ゲーム理論は数学的な発展，特に測度理論を用いて Player の集合を測度空間とした設定の下，すでに１９６０年代において著しい発展を遂げた分野である．

このコア概念は上の 6.1.1 節におけるコア概念とは異なる．先のものは 1 つの coalition 全体で実現される値にのみ着目しており，効用値を互いにやりとり可能 (transferable utility) であるような場合であればここでの概念と一致するが，通常の経済学的設定において（合計値を一定にしたままでの）効用値のやりとりは不可能である．一般に，効用値のやりとり不可の想定の下で考えた協力ゲームの概念 games with non-transferable utilities （Non TU Games）は，coalition 全体の効用値のあり方のみを考慮した上記の協力ゲームの概念 games with transferable utilities（TU Games）と区別され，コアの意義，存在の条件なども異なったものとなる．Non TU Game の厳密な定義，コア存在条件の詳細についてはIchiishi (1983)（そこでは cooperative games without side payments と述べられている）を見よ．

Theorem 6.1 $\{x_i^*\}_{i=1}^m$ が価格 p^* の下で経済 $\mathcal{E} = (X_i, \precsim_i, \omega_i)_{i=1}^m$ の競争均衡資源配分であるものとする．全ての i について x_i^* における i の選好が局所非飽和であるとき，$\{x_i^*\}_{i=1}^m \in \mathcal{C}ore\mathcal{E}$.

【Core Equivalence・Core Convergence】

上の定理が主張するように，厚生経済学の第一基本定理と同様のかなり一般的な条件の下で，競争均衡資源配分はコア資源配分であることが言える．以下で扱う Core Equivalence Theorem (Core Convergence Theorem) と呼ばれるものは，経済の構成人員が十分大きな場合においていわばその逆，すなわち Core Allocation が競争均衡 Allocation である（または，ある意味で近づく）ということを主張するものである．

(1) レプリカ経済の Core Convergence Theorem: Debreu and Scarf (1963)

(2) Anderson による Core Convergence Theorem: Anderson (1978)

(3) Large Economy における Core Equivalence Theorem: Hildenbrand (1974)

6.2 非協力ゲーム理論

本節では，**非協力ゲーム** について解説する．以下で用いるいくつかの例を含めて，参考にすべき図書として Kreps (1990) を挙げておく．

協力ゲームにおいては Coalition という概念を通じ何らかの意味において安定的な資源配分（解）を分析することが目標であった．このとき我々は “許容された Coaliton のあり方” というものを前提として議論を進めた．ゲームの理論が人間の行動に対する分析であるとすれば，その出発点に「協力」という概念をもってくることは非常に自然かつ本質的であり，そうして実現し得る結果の中におそらく人間社会の最も望ましい姿も含まれているに違いない．しかしながら，今日において我々が直面するのは，そういった望ましい「協力」による解が，あくまで「個人」を出発点としたシステムとしていかに実現できるのかという問題である．“協力” ゲームは “許された協力のあり方” を前提とし，そこから “どのような結果が導かれるか” を明らかにしたが，非協力ゲームにおいては，むしろ “一人一人が独立した行動を許されている” 状態から，どのようにして “協力的な（あるいは望ましい）行動が導かれるか（導かれないか）” を問題とする．協力ゲームの主眼が “ゲームの結果 (Outcome) ” にのみ置かれているのに対して，非協力ゲームの主眼はその結果のみならず “ゲームを play する個々の主体の戦略（Strategy）のあり方” にも置かれているのはそのためである．

6.2.1 非協力ゲームの標準形（戦略形）

以下 6.2 節を通じてゲームは次のような記号をもって表現される．

(1) Players : $\{1, 2, \cdots, m\} = I$ を plyer の集合とする．

(2) Strategies for each player : 各 $i \in I$ に対して，S_i という集合が定義されているものとする．

(3) Payoffs for each player : 各 $i \in I$ に対して，もしも $(s_1, \cdots, s_m)$ という戦略の組（ただし $\forall j,\ s_j \in S_j$ である）が与えられたとき，それに応じて i の受け取る利得を決める関数 $u_i : \prod_{j \in I} S_j \to \boldsymbol{R}$ が定義されている．

このとき我々は，**標準形**（または**戦略形**）の非協力ゲームが一つ定義された，という言い方をする．

6.2.2 非協力ゲームの均衡

非協力ゲームが一つ定義されたとする．我々の第一の関心は，与えられたゲームにおいてどのような各人の戦略の組み合わせが play されるか（そしてどのような利得の組み合わせが各人に与えられるか）という問題である．この問題に対する解答を持つようなゲーム，すなわち「何らかの説得的な根拠の下で，明白な play のなされ方 (obvious way to play)」を持つようなゲームを指して，解 (solution) のあるゲームと呼ぶ．またその時の明白な play のなされ方（すなわち戦略の組み合わせ）を指して，その**非協力ゲームの解**と呼ぶ．

全ての非協力ゲームが何らかの説得的な根拠の下で自明な play のなされ方（解）を持つわけではない．[38] ま

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	1, 1	0, 0
	s2	0, 0	10, 10

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	10, 0	0, 10
	s2	0, 10	10, 0

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	10, 0	0, 10
	s2	0, 10	10, 0

		Player 2				
		t1	t2-0	t2-1	t2-2	t2-3	⋯
Player 1	s1	1,1	0,0	0,0	0,0	0,0	⋯
	s2-0	0,0	10,10	9,11	9,11	9,11	⋯
	s2-1	0,0	11,9	9,9	9,11	9,11	⋯
	s2-2	0,0	11,9	11,9	9,9	9,11	⋯
	s2-3	0,0	11,9	11,9	11,9	9,9	9,11
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	11,9	⋱

た,「何らかの説得的な根拠」という言い方も，ほとんど厳密な取り扱いには馴染まない．そこで我々は,「もしも自明な play のなされ方というものがあるとして，それらは少なくともどのような条件を満たすべきであろうか」という，立場へ一歩下がることにしよう．しかも，その立場は場合によって，背後の想定によって，変わってくるかも知れない，というところまで譲歩してしまおう．そのような条件を満たす概念を我々は「解」と区別してゲームの「均衡」と呼ぶことにする．[39]

[38] 実際，今から解説する Nash 均衡にしても，それはせいぜい「自明な play のなされ方というものが**もしもあるとすれば**，それが自明と呼ばれるための必要条件を与える」程度のものに過ぎない．Unique な Nash 均衡を持つゲームでありながら，obvious way to play を持つための説得的な根拠を見つけることが不可能（とおそらく万人の納得する）ゲームの例もある.（図参照）

[39] 解が**存在すると仮定したら**それが満たすべき条件の候補，という話であって，**解が存在するかどうか**は別問題である．すなわち，均衡が存在しても解が存在するとは限らない.（前注 38 参照.）

非協力ゲームにおける均衡は，player 達の戦略の組 $(s_1, \cdots, s_m), s_1 \in S_1, \cdots, s_m \in S_m$ という形で表される．非協力ゲームの均衡概念として最も基本的なものは Nash 均衡概念と呼ばれるもので，これは通常我々が注目する中では最も緩やかな意味で安定的（自明な play のなされ方というものがあるとすれば，おそらくそれくらいのことは当然満たされていて欲しいという意味で）な player 達の戦略の組み合わせである．非協力ゲーム理論において Nash 均衡が最も基本的かつ重要な概念であることは議論をまたないが，ここではその議論に入る前に，もっと強い意味で安定的な player 戦略の組み合わせが存在する場合を見ておくことにしよう．

各 player i が strategy set S_i の中から最適な戦略を選択するにあたって，通常前提とされる決まり文句が一つある．それは，

> 【前提：共通認識】"全ての player は，全ての player の戦略集合，利得関数，ならびにそれらの下での全ての player の合理性，を共通認識 (Common Knowledge) として持っている"

という言い回しである．

ここで非常に重要な注意すべき点が存在している．"戦略集合" と "利得関数" が共通認識というのはいいとして，"合理性" についての共通認識とはどういうことであろうか．我々は絶対的な "合理性" の何たるかについて，すでに説明を不要とするほどの何かを得ているとでもいうのだろうか．実際ここで想定されていることは，むしろ逆である．我々は人間の合理性といったものについての満足のいく叙述をむしろ断念すべきなのであり，従って合理性の共通認識ということもまた合理性の何たるかを白紙にして空けておきながら，そこに場合に応じて適切に形式化された概念を放り込む以外に無い．

以下では「各 player の合理性」という概念を

> 「各 player 1つずつ持っている形式化された戦略決定の根拠」

というところまで限定してしまおう．そして，各人が持っているそういった1つひとつの根拠（論理式によってきちんと形式化された理屈と，その下での選択された戦略）が，**全ての Player にとって互いに利用可能な情報である**ということでもって，厳密な意味での**合理性の共通認識**と呼ぶことにする．

このような共通認識に関する前提に基づいて，以下で問題とすべき「均衡」概念もまた，**そのような合理性の共通認識の下で，各人において選択された戦略が影響を受けないようなもの**ということに限定しよう．後に述べる Nash 均衡は，そのような概念の代表例である．[40] Nash 均衡の定義を与える前に考察しようというのは，この "合理性についての Common Knowledge" という視点を守りながら，Nash 均衡よりももっと強い意味で安定的な均衡の概念である．それは "Strict Dominance" という概念および，その連続的な使用 (Iterated Dominance) から導かれる，player 達の戦略の組み合わせである．

【Strict Dominance Solvable Games】

非協力ゲームが次の標準形で与えられているものとする．

[40] 上で述べた「合理性の共通認識」は「選択された戦略の限定」を前提としている点が，通常言われている概念と異なっており，それが通常言われている定義問題を簡単にしている．ここで，通常の "合理性についての共通認識" と言われるものについて説明しておく．例えば，player 1 と player 2 からなるゲームにおいて，player 1 はわざわざ自ら損をするような戦略を選ぶ事はない．（これが player 1 の合理性．）そのことが共通認識となっているとはすなわち，player 2 が "player 1 は自ら損をするような戦略を取らない" と認識していることを意味する．（これは player 1 の合理性についての player 2 の認識．）従ってこの場合 player 2 は "player 1 が自ら損をするような戦略を取らない" と認識した上で，わざわざ自ら損をするような行動はとらない．（これは player 2 の合理性．） これがさらに共通認識になっているとは，player 1 が "player 2 は player 1 が自ら損をするような戦略を取らないと認識した上で，自ら損をするような行動は取らない" ということを認識していることを意味する．（これが player 1 の認識．）従って player 1 は，"player 2 は player 1 が自ら損をするような戦略を取らないと認識した上で，自ら損をするような行動は取らない" と認識した上で，自ら損をするような行動は取らないであろう．（これは player 1 の合理性．）さらにこれが共通認識になっているわけだから，player 2 はそのことを認識した上でなお合理的な行動を，そしてさらに player 1 は，それを認識してなお合理的な行動をとることになる．このような互いの合理性の認識に関する無限の連鎖が，合理性についての共通認識 (Common Knowledge) と通常言われているものである．実際にこのような頭の中のできごとを，各 player にとって可能な認識構造としてゲームの一部として記述することは，通常の述語論理においては不可能であり，仮にそのようなものを本当に前提としているのであれば，ゲーム理論自体はその土台をかなり困難なものの上に置いていると言わざるを得ない．

(1) Players : $\{1, 2, \cdots, m\} = I$.

(2) Strategies : 各 $i \in I$ について S_i.

(3) Payoffs : 任意の戦略の組 $(s_i \in S_i)_{i \in I}$ と，各 $i \in I$ について，$u_i(s_1, \cdots, s_m) \in \boldsymbol{R}$.

Definition 6.2 (Strictly Dominated Strategies) player i の戦略 $s_i \in S_i$ に対してある $s'_i \in S_i$ が存在して，任意の $(s_j \in S_j)_{j \in I, j \neq i}$ という i 以外の player 達の戦略の組について

$$(s_1, \cdots, s_i, \cdots, s_m) < (s_1, \cdots, s'_i, \cdots, s_m)$$

となるとき，player i の戦略 s_i は s'_i によって strict に dominate される (strictly dominated) と言う.

		Player 2		
		t1	t2	t3
Player 1	s1	4, 0	1, 5	6, 4
	s2	5, 3	6, 0	−3, −1

		Player 2		
		t1	t2	t3
Player 1	s1	1, 0	2, 8	1, 3
	s2	0, 8	1, 0	100, 3.5

二つの strict dominance （連続使用を含む）で solvable な例.

Remark (Weak Dominance およびその連続的使用) : weakly dominated strategy は complete certainty によって支えられており，そのような strategy を strictly dominated strategy 同様に切り捨ててしまうことには，非常に慎重であらねばならない.

		Player 2	
		t1	t2
Player 1	s1	10, 0	3, 1
	s2	10, 10	2, 0

Strictly dominated strategy ならびにその連続的使用の下で生き残る戦略の組はもちろん非常に強い均衡概念であり，例えば単に Nash 均衡であるというよりも，より「解」と呼ばれるにふさわしいものであることは間違いないのだけれども，もしそのようなものとそうでないものが存在したとき、果たしてそれが他のものより「常に」解と呼ばれるに相応しい（絶対に play される）かと言えば、やはり慎重にならざるを得ない疑問が残る.（強いけど、所詮は「一つの根拠にすぎない」と考えるべきである.）

		囚人 2	
		not confess	confess
囚人 1	not confess	5, 5	−3, 8
	confess	8, −3	0, 0

		囚人 2	
		not confess	confess
検事の弟	not confess	10, 5	−3, 8
	confess	8, −3	0, 0

【Nash Equilibrium (単純戦略の場合)】

先にも述べたように，Nash 均衡とは player 達の戦略の組み合わせであって，ある弱い意味において，おそらく非協力ゲームで意味あるものとして通常注目される中では一番弱い—一般的な—意味において，安定的なものである．標準形ゲーム

(1) Players : $\{1, 2, \cdots, m\} = I$.

(2) Strategies : 各 $i \in I$ について S_i.

(3) Payoffs : 任意の戦略の組 $(s_i \in S_i)_{i \in I}$ と，各 $i \in I$ について，$u_i(s_1, \cdots, s_m) \in \boldsymbol{R}$.

が与えられたとき，戦略の組 $(s_1^*, \cdots, s_m^*)$ が **Nash 均衡**であるとは，任意の $i \in I$ に関して，i がその戦略を任意の $s_i \in S_i$ に代えたとしても何の利益もないことを指す．厳密に述べると，

Definition 6.3 任意の $i \in I$ に関して，$\forall s_i \in S_i$,

$$u_i(s_1^*, \cdots, s_i, \cdots, s_m^*) \leq u_i(s_1^*, \cdots, s_i^*, \cdots, s_m^*) \tag{109}$$

が成り立つとき，戦略の組 $(s_1^*, \cdots, s_m^*)$ は Nash 均衡であると呼ばれる．

【混合戦略の下での Nash 均衡】

単純戦略の下では，必ずしも Nash 均衡の存在しないゲームが存在する．しかしながら，戦略の概念を以下で述べる混合戦略に変えるならば，本節で扱う任意の標準形ゲームに対して，少なくとも一つの Nash 均衡が存在することを示すことができる．

ゲームはいままで通り

(1) Players : $I = \{1, 2, \cdots, m\}$.

(2) Strategies : S_i, $i \in I$.

(3) Payoffs : $U_i : \prod_{j \in I} S_j \to R$, $i \in I$.

によって与えられるものとする．このとき，あくまでこのゲームに基づきながら，"戦略 (S_i, $i \in I$)" という概念を "混合戦略" というものに拡張してみよう．(以下混乱を避けるため，S_i は player i の "単純戦略" の集合と呼ぶことにする．) 単純戦略の集合 S_i に基づく player i の 1 つの**混合戦略**とは，S_i 上の 1 つの確率分布 σ_i を指す．(すなわち σ_i とは S_i を定義域とし閉区間 [0, 1] に値をとる関数で，$\sum_{s \in S_i} \sigma_i(s) = 1$ となるようなものである．)

以下，S_i 上の混合戦略の全体を Δ^{S_i} で表す．さてこのように "戦略" という概念を S_i から Δ^{S_i} へと拡張した以上，それにともなって player i の利得関数 u_i の方も拡張する必要が生じる．もともと $\prod_{j \in I} S_j$ 上の関数であった u_i を，$\prod_{j \in I} \Delta^{S_j}$ 上の関数 $\bar{u}_i$ として，次のように拡張する．各 $i \in I$ および各混合戦略の組 $(\sigma_1, \cdots, \sigma_m) \in \prod_{j \in I} \Delta^{S_j}$ に対して，

$$\bar{u}_i(\sigma_1, \cdots, \sigma_m) = \sum_{(s_1, \cdots, s_m) \in \prod_{j \in I} S_j} \left(\prod_{j \in I} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s_1, \cdots, s_m). \tag{110}$$

このとき（**混合戦略のもとでの**）**Nash 均衡**という概念は，先の単純戦略の Nash 均衡という概念における各 $i \in I$ についての S_i を Δ^{S_i} で，各 u_i を $\bar{u}_i$ で置きかえたものとして定義される．

THEOREM 6.4 $S_1, \cdots, S_m$ を有限集合とするとき，混合戦略の下での Nash 均衡が少なくとも一つ存在する．

(Proof) $\Delta^{S_1}, \cdots, \Delta^{S_m}$ は全てコンパクト集合である．従ってその積 $\prod_{i \in I} \Delta^{S_i}$ もコンパクト集合．ここで，Δ^{S_i} からそれ自身への対応 Φ を

$$\Phi : (\sigma_1, \cdots, \sigma_m) \mapsto \{(\sigma_1', \cdots, \sigma_m') | \forall i \in I,\ \sigma_i' \text{ は } \sigma_1, \cdots, \sigma_m \text{ への best response } \}$$

とする．Maximum Theorem 等から，対応 Φ の上半連続性，凸性，非空性，およびコンパクト値であることが容易に示される．従って角谷の不動点定理から Φ は不動点 $(\sigma_1^*, \cdots, \sigma_m^*)$ を持つ．これが Nash 均衡であることは明らかである， (Q.E.D.)

6.2.3 展開形ゲーム

【展開形のゲームおよびその標準形】

次の (i) から (vii) によって規定されるゲームを，展開形のゲームと呼ぶ．

(i) player の集合 $I = \{1, 2, \cdots, m\}$．仮想的な player N (Nature).

(ii) node の有限集合 T および T 上の二項関係 $\prec$．$\prec$ は asymmetric かつ transitive であり，任意の node $x \in T$ に対して $P(x) = \{y \in T | \, y \prec x\}$ （x の predecessors の全体からなる集合と呼ぶ）は $\prec$ により totally ordered であるものとする．

(iii) $x \in T$ のうち，集合 $S(x) = \{z \in T | \, x \prec z\}$ （x の successors の全体からなる集合と呼ぶ）が空集合でないものの全体を X で表す．各 $x \in X$ について，それがどの player に属する node であるのかを決める関数 $\iota : X \to \{1, \cdots, m, N\}$.

(iv) $\forall x \in X$ に対する Available Actions を表す集合 $A(x)$.

(v) Information Sets

(vi) Terminal nodes $Z = \{t \in T | \, S(t) = \emptyset\}$ 上に与えられる，各 player への利得を表す関数 $u : Z \to \boldsymbol{R}^m$

(vii) Initial nodes $W = \{t \in T | \, P(t) = \emptyset\}$ 上への確率測度 ρ および nature に属する各 node t における $A(t)$ 上の確率測度 ρ_t.

さて，与えられた展開形のゲームに対して各 player i の単純戦略集合 S_i をうまく定義してやることによって，それと同等な標準形のゲームをつくることができる．展開形のゲームが一つ与えられておれば，その Game Tree 上の各 Information Set がどの player のものかということ，並びにその Information Set における可能な Action の全体は確定している．そこで，player i が i に属する Information Set の各々についていかなる Action をとるかについてすべて決定するということを，player i の一つの単純戦略と見なすことによって一つの標準形ゲームをつくることができる．これを，もとの展開形ゲームから得られる自然な戦略形ゲーム，と呼ぶことにする.（戦略形ゲームから逆に展開形ゲームに戻す方法は，明らかに一通りではない.）

【展開形ゲームにおける混合戦略】

展開形ゲームに置いて最も自然な意味での “混合戦略” ということを考えるならば，それは “すべての Information Set に対して，それぞれにおいて可能な行動の全体に直接確率測度を与えたもの” であろう．これを **Behaviorally Mixed Strategy** と呼ぶ.

もう一つの自然な “混合戦略” 概念として，展開形ゲームに対して自然に定まる標準形ゲームの混合戦略があげられる．これを，もとの展開形ゲームの **Normal form mixed strategy** と呼ぶ.

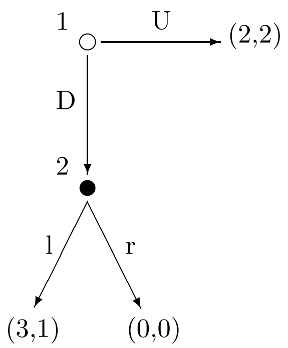
Theorem 6.5 （ Kuhn’s Theorem ）Perfect Recall の仮定を満たす展開形ゲームが与えられているものとする．このとき，その展開形ゲームの自然な標準形表現の Normal form mixed strategy を一つとってきたとき，それと同値な Behaviorally mixed strategy が唯一つ存在する．逆に Behaviorally mixed strategy を一つとってきたとき，そのゲームの自然な標準形表現においてそれと同値な Normal form mixed strategy が少なくとも一つ（通常は複数）存在する．ただしここで二つの混合戦略が同値であるとは，各戦略が結果として導く結果の Distribution が等しい（他の全ての player の戦略を任意に固定したとき，自らの混合戦略の下でたどりつく最終ノードについての確率分布が等しい）ことを指す.

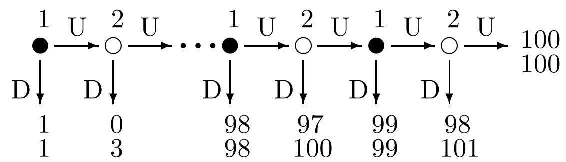
6.2.4 Nash 均衡の Refinement

以下，本節では Perfect Recall の仮定が満たされており，従って Kuhn’s Theorem が成立するものとする.

【Dominance と Refinement】

Remark （Backwards Induction）





		Player 2	
		l	r
Player 1	U	2, 2	* 2, 2
	D	* 3, 1	0, 0

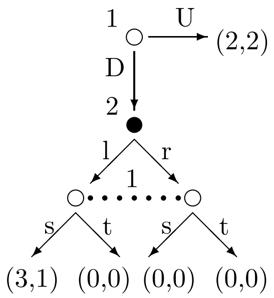
【Subgame Perfection】

一つの展開形ゲームが与えられたとき，その任意のノード s と s の successors の集合 $S(s)$ が，条件 “ s を含む informationset は $\{s\}$ であり，任意の $t \in S(s)$ について，t を含む information set は $S(s)$ の部分集合である” を満たすならば，s を initial node とし，$\{s\} \cup S(s)$ を node の全体とする新しいゲームが定義される．このゲームをもとのゲームの **proper subgame** と呼ぶ．このとき，もとの展開形ゲームの Behaviorally Mixed Strategy を，proper subgeme の戦略と見なすことができる．もとのゲームの Nash 均衡が，任意の

proper subgame に対してその Nash 均衡を与えるとき，そのような Nash 均衡は **Subgame Perfect** な Nash 均衡であると言われる．

【Sequential Equilibrium】

s を initial node とする subgame という概念において，“s を含む information set は $\{s\}$ であり，任意の $t \in S(s)$ について，t を含む information set は $S(s)$ の部分集合である” という条件が満たされないならば，subgame は game としてきちんと定義できない．たとえば subgame の始点にあたる s を含む information set が $\{s\}$ でなかったとすれば，game の出発点が定義されない．また, いずれかの player の information set



		Player 2	
		l	r
Player 1	U	$2,2$	^{*2,2}
	Ds	$3,1$	$0,0$
	Dt	$0,0$	$0,0$

が，s の successors とそうでないところとにまたがることも有り得る（perfect recall であれば，少なくとも initial node s に対する player （ $=\iota(s)$ ）について，そのような事態は生じないが）．そのような場合にも適用できるように Subgame Perfect Equilibrium の概念を自然に拡張したものが Sequential Equilibrium である．Sequential Equilibrium は展開形ゲームの Nash 均衡に対する Refinement 概念であり，Sequential Rationality および Consistent Beliefs という 2 つの概念を用いて定義される．

（Sequential Rationality）

まず我々は，各主体が各々の information set 上に与える確率分布（System of Beliefs）に着目しよう．すべての Decision node に対して 0 以上 1 以下の数字を与える **System of Beliefs** と呼ばれる関数 $\mu : X \to [0,1]$ を考える．この μ は，すべての Information set h に対して，$\forall t \in h$, $\sum_{t\in h}\mu(t) = 1$ となるようなものとする．すなわち μ は，各 Information Set において，各 player が “一応その Information Set にたどり着いたと仮定” する場合に，果たしてどの node にいるかについて，各自の予想（信念）のリストを表すものと考えることができる．この System of Beliefs が与えられれば，我々は任意の Information set h に対して（Subgame の場合，任意の Subgame に対して，自らの戦略が他者の戦略に対する Best Response であったことを確認したのと同様に）そこから先の行動の合理性を問う事ができる．すなわち，

> 戦略の組 $\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^m)$（ここで，$\pi^i$ は player i の behaviorally mixed strategy を表すものとする）を与えられたものとする．System of Beliefs $\mu : X \to [0,1]$ を与えられたものとする．h を任意の Information Set とし，$i = \iota(h)$ とする．h に属する node または h に属する node の successor となる node の全体を T_h で表す．このとき，
>
> - h に属する各 node に対して，μ から与えられる自分自身（ $=i$ ）の Belief を与える，
> - T_h に属する他者（ $\neq i$ ）の node の全てに対して，$\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^m)$ から導かれる他者の戦略 π^j, $j \neq i$ を固定する，
>
> ことによって,（即ち player i にとって μ に現れる i 以外の belief は意味を持たない,）自らの戦略 π^i が他者の戦略 π^j, $j \neq i$ への Best Response となっているかどうか,

を問う事ができる．任意の h について上のことが（ Best Response であるということが）成立するとき，戦略の組 π は System of beliefs μ の下で，sequentially rational であるという．

（ System of Beliefs の Consistency ）

上に挙げたような System of Beliefs として，我々はどのようなものを許容すべきであろうか．我々は少なくとも以下に述べる consistency という概念が満たされていることを要求する．Behaviorally Strictly Mixed Strategy Profile π_1（全ての player の全ての information set における戦略のリストで，各 information set における全ての単純戦略に 0 でない確立を与えたもの）を任意に一つ固定する．このとき任意の node t に対して，t にたどり着く確率 $p_1(t)$ が正の値として計算される．各 Information set h 上の node について，その Information Set にたどり着いたとしたときの条件付確率は，

$$\forall \hat{t} \in h, \; \frac{p_1(\hat{t})}{\sum_{t \in h} p_1(t)}$$

によって与えられる．これを $\mu_1(\hat{t})$ とおき，μ_1 を **Strictly mixed strategy profile π_1 から自然に導かれる System of Beliefs** と呼ぶ．一般に，Behaviorally mixed strategy profile π と任意の Belief μ に対して，π と μ が **consistent** であるとは，π および μ が strictly mixed strategy profile の列 $\{\pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ およびそれらから自然に導かれる Beliefs の列 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ によって，

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \pi_n$$
$$\mu = \lim_{n \to \infty} \mu_n$$

とできることを言う．

（Sequential Equilibrium）

Definition 6.6 **(Sequential Equilibrium)** 戦略の組 π に対して，π と consistent な System of Beliefs μ が少なくとも一つ存在し，その下で π が sequentially rational となるとき，(π, μ) を sequential equilibrium と呼ぶ．

【Trembling-hand Perfection】

一つの展開形ゲームに対して，その Agent normal form というものを定義しよう．与えられたゲームの互いに異なる Information set $h \in H$ に対して，互いに異なる Agent $i_h, h \in H$ を割り当てた新しいゲームを考える．この新しいゲームの各 player i_h の利得は，もとのゲームにおける information set h の所有者の利得として定めるものとする.（明らかに新しいゲームにおける各 player の strategy を一つ定めると，そこから一意的にもとのゲームの strategy profile が一つ定まる.）このように定義された新しいゲームの標準形表現を，もとのゲームの Agent normal form と呼ぶ.

Agent normal form のゲームは標準形のゲームであるから，混合戦略のもとでの Nash 均衡が必ず存在する．Agent normal form における strategy profile を，一般に $\sigma = (\sigma_h)_{h \in H}$ という形で表しよう．ここで H は player 全体の集合（即ち，もとのゲームの Information set 全体の集合）である．Behaviorally mixed strategy の場合と同じく，normal form の mixed strategy に対しても **strictly mixed strategy** ならびに **strictly mixed strategy profile** 等の概念が全く同様に定義される．

Definition 6.7 Nash 均衡 σ が **(trembling-hand) perfect** であるとは，ある strictly mixed strategy の列 $\{\sigma^n = (\sigma_h^n)_{h \in H}\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\lim_n \sigma^n = \sigma$ なるものが存在して，任意の n と任意の $h \in H$ について，σ_h が $(\sigma_i^n)_{i \in H, i \neq h}$ に対する最適戦略 (Best response) になっていることをいう．[41]

[41] σ_h^n ではなく，σ_h が Best responce である点に注意せよ．

6.2.5 Repeated Game

戦略形のゲーム $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ を考える．G の（割引率 δ の下での無限回）繰り返しゲーム G^* を次のように定義する．(以下で，$t = 0, 1, 2, \cdots$ によって繰り返しの各 stage をカウントしているのだと読めば，分かりやすい．)

(G^* の players) $i \in I$

(G^* における単純戦略) $s_i = (s_i(t) : (\prod_{j\in I} S_j)^t \to S_i)_{t=0}^{\infty}$.[42]

(G^* における利得) 単純戦略 $(s_j)_{j\in I}$ が出揃っているものとする．$\pi(0) := ((s_j(0)(\emptyset))_{j\in I})$ と定義する．また $t = 1, 2, \cdots,$ について帰納的に $\pi(t) := ((s_j(t)(\pi(0), \cdots, \pi(t-1)))_{j\in I})$ と定義する．このとき，単純戦略 $(s_j)_{j\in I}$ が出揃った下での player i の利得は，$\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i(\pi(t))$ と定義する．ここで δ は割引率であり，$0 < \delta < 1$.

ゲーム G^* における Nash 均衡について，次のことが知られている．

THEOREM 6.8 （ Folk Theorem ）Game G を stage game とする無限回くり返しゲーム G^* を考える．各 player i について，

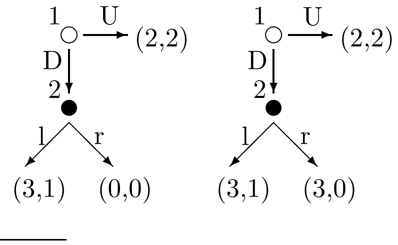
$$\bar{v}_i = \min_{j\neq i, \hat{t}_j \in \hat{S}_j} \max_{t_i \in S_i} u_i(\hat{t}_j; t_i)$$

とする.[43] このとき，割引率が十分 1 に近ければ，各 i について $\bar{v}_i$ 以上の利得を与える実現可能な状態はすべて G^* の Nash 均衡であることが言える．

6.2.6 Games of Incomplete Information

展開形ゲームにおいて，各 information set が single node からなるとき，これを完全情報のゲーム (Games of Perfect Information)，そうでないとき不完全情報のゲーム (Games of Imperfect Information) と呼ぶ．

本節の最初に【前提 : 共通認識】として述べたように，戦略形ゲーム $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ を考えるとき，各 player $i \in I$ は自分のみならず，他の全ての player の character （特に I, S_j, u_j, $j \neq i$ を指す．他者の "合理性" についてまで言及することは，ここでは「選択された戦略」まで含めて「均衡」を語る場合に限定することにしよう）を明確に知り得ている—情報として利用できる—ことが前提となる．これに対して，Player の集合，戦略の集合，利得関数，という明らかに明示的なゲームの基本構造の中に，共通認識でない部分を含むような設定を持つゲームを指して，非完備情報のゲーム (Games of Incomplete Information) と呼ぶ．



[42] ここで $(\prod_{j\in I} S_j)^t$ は集合 $\prod_{j\in I} S_j$ の t 回の product を表す．ただし $t = 0$ のときは $\{\emptyset\}$ を表す．公理的集合論の立場からすると，集合 A に対して，$A^0 = \{\emptyset\}$ である．なぜなら $0 = \emptyset$ であり，定義域を $\emptyset$ とする関数は empty function $\emptyset$ のみであるから，$A^0 = \{\emptyset\}$. もちろん $0 = \emptyset$ だからこれを $\{0\}$ と書いても良い．ちなみに $\{0\} = 1$ であるから，この記述方法は通常のべき乗の慣習とも整合的である．

[43] ここで u_i は G ではなく G^* のもの（期待値をとったもの）である．その引き数に t_i が入っているが，正確にはこれは $t_i \in S_i$ に 1 を与える確率測度を表している．

非完備情報の設定下では，各 player のゲーム基本設定に対する認識がそもそも異なるので，各 player は他者がゲームをどう見ているかについての（1 つの主観に基づく）想定から出発しなければならない．ところがそういった想定は，なされると同時にその主体のみが知り得る情報となってしまうので，結局その想定に対してのまたまた他者の想定を，さらにその他者の想定に対する想定を，という形の（ゲームの設定記述のための）無限連鎖が生じてしまう．[44] そこで先に "合理性の共通認識" を述べたときと同じ方法で，このようなゲームの均衡概念を確立すること，そのための各人の想定のあり方，ということに専念してみよう．すなわち：

> 【世界観想定をともなうゲームの均衡】各人の世界観についての想定とその下で選択された戦略の組を並べたものであって，仮にそれらが全ての主体にとって相互に利用可能な情報となった場合においても，各人の想定と戦略の選択が何ら影響を受けないようなもの

を指して，このようなゲームの均衡概念と考えるという立場である．そのような概念は（完備な場合のゲームの Nash 均衡概念と同様）もちろん唯一では無い．

非常に良く用いられる上記の概念の特殊ケースが存在する．それは,「世界観が共有できない」という問題を，便宜的に「世界観が共有できてないことを表現した 1 つの世界観が共有できている」という完備（不完全）情報のゲームに置き換えてしまい，その Nash 均衡概念を用いるという方法である．この置き換えられたタイプのゲームは **Bayesian Game** と呼ばれ，その Nash 均衡は **Bayesian Nash Equilibrium** と呼ばれる．以下にその詳細を述べる．

各 player の利得関数 u_i は，実際は各人の character $\theta_i \in \Theta_i$ というものに依存した，

$$u_i(\cdot, \theta_i) : \prod_{i \in I} S_i \to R$$

という形をしており，各 player はそれぞれ自分の character については知っているものの，他の player の character についてはよく知らないところがある，という不完備情報ゲームを考えよう．以下，各 $i \in I$ について player i の character は Θ_i という集合の要素として表現されているものとする．

さて，この非完備情報ゲームに対して 2 段階の展開形ゲームを考え，最初の node を Nature が各人の character を決定するためにさいころを振る node であるとみなした不完全情報ゲームにしてしまおう．各人は自己の character について 2 段階目で知ることになるが，他者の chatacter については知り得ないものとし，**Nature のふるさいころの目の出方は，$\Theta = \prod_{i \in I} \Theta_i$ として，Θ 上の確率分布 ν として，全ての player の共通認識になっている**ものとする．形式的に述べると，元の非完備情報のゲームを，不完全情報のゲーム $\tilde{G} = (I, (S_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I}, \Theta, \nu)$ に変換する．ここで各 u_i は先に述べた $\prod_{i \in I} S_i \times \Theta_i$ 上の実数値関数である（$\prod_{i \in I} S_i$ 上のではない点に注意）．この不完全情報のゲームにおける $i \in I$ の単純戦略は，Θ_i 上の関数 $s : \Theta_i \to S_i$ である．全ての player の戦略が $(s_i)_{i \in I}$ と出揃えば，player i の利得は，

$$\int_{\Theta} u_i((s(\theta_j))_{j \in I}, \theta_i)\, d\nu((\theta_j)_{j \in I})$$

と表される．このようにして非完備情報の問題を不完全情報のゲームに帰着させたものが往々にしてそのまま非完備情報のゲーム (Games of Incomplete Information) と呼ばれることもある．

この立場の最大の問題点は，お互いに独自の個人情報を持ち得ている主体というのが出発点でありながら，そういった主体間で，なぜ各自の特性に関する事前確率 ν を共通認識として持ち得るのか，そこに何の根拠も正当性も持たないという点である．各人が世界についてどのような想定を持つかということは，今のところ個人情報を持つ各人の頭の中にのみ属する問題である．出発点は，個人情報のみを持った各 player であって，

[44] 実は先に述べた通り，そういった連鎖は完備な設定であっても「合理性の共通認識」の中で相手の合理性に対する認識の内に，すでになされておらねばならないのだが，通常完備な設定の下でのその問題にはあまり触れられないで，このような非完備情報ゲームの下ではじめて主観に基づく想定とその共通認識の問題としてとり扱われる．

各人の想定は自らの世界についての信念なのである．自らの信念と他者の信念（異なるとすれば）を並列して，それらの間に各人が他者と共通の事前確率を置くというのは，そもそもの各自の信念が世界観についての自らのまさしく信念であったということが事実なのであれば，まさしくそこからの「世界観についての信念の鞍替え」を暗黙的に要請している．

非完備情報の問題を Bayesian Nash 均衡としてとらえるという発想が，それに必要な事前確率を（例えば意識改革，教育，宗教，洗脳を通じて）みんなで共有しましょう，という一つのかけ声であり思想であるのだとすれば，はっきりとそのように述べるべきである．

6.3 補論 1 ：非協力ゲームと一般均衡理論

ここでは Abstract Economy と呼ばれるゲーム論的に抽象化された経済モデルについて解説する．一般均衡の存在問題，条件等がこの抽象度で議論されることも多い．

6.3.1 Abstract Economy

抽象経済とは，通常の戦略形の非協力ゲームを次のような形に一般化したものをさす．

Player の集合：$I = \{1, 2, \cdots, k\}$,

戦略集合：S_i, $i \in I = \{1, 2, \cdots, k\}$,

制約対応：$A_i : \prod_{i \in I} S_i \ni (s_1, \cdots, s_k) \to A_i(s_1, \cdots, s_k) \subset S_i$, $i \in I$,

利得：$v_i : \prod_{i \in I} S_i \to R$, $i \in I$.

抽象経済の均衡（拡張された意味での Nash 均衡）とは，players の戦略の組 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_k^*)$ で，

(i) 全ての i について，$s_i^* \in A_i(s^*)$,

(ii) 全ての i について，$v_i(s_1^*, \cdots, s_k^*) \geq v_i(s_1^*, \cdots, s_i, \cdots, s_k^*)$, $\forall s_i \in A_i(s^*)$,

を満たすようなものを言う.（通常の非協力ゲームの戦略形およびその Nash 均衡は，上で定義した抽象経済において，全ての i について $A_i(s_1, \cdots, s_k)$ が常に S_i に等しいとした特殊ケースであることに注意せよ.）抽象経済の均衡の存在は，Debreu (1952) あるいは Shafer and Sonnenschein (1975) 等によって，非常に一般的な条件の下で証明されている．

静学的一般均衡理論における経済 $\mathcal{E} = ((X_i, u_i, \omega_i, (\theta_{ij})_{j \in J})_{i \in I}, (Y_j)_{j \in J})$ を，上で定義した抽象経済（あくまで "拡張された意味での" 非協力ゲームである）として次のように解釈する．

players	消費主体 $i = 1, \cdots, m$	生産主体 $j = 1, \cdots, n$	競売人 N
戦略集合	$X_i \subset R^\ell$	$Y_j \subset R^\ell$	$\Delta^{\ell-1}$
制約	$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} p \cdot y_j$	Y_j	$\Delta^{\ell-1}$
利得	$u_i(x_i)$	$p \cdot y_j$	$p \cdot z$

（上で Δ は $\ell - 1$ 次元の unit simplex を表す．もちろん ω_i は消費主体 i の初期保有を，θ_{ij} は消費主体 i の生産主体 j に対する share holding を表す．また z は $\sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m \omega_i - \sum_{j=1}^n y_j$ を表す.）

抽象経済をこのように解釈できること，ならびにそう解釈したときの均衡（それは上のような拡張されたゲームの上での Nash 均衡の拡張概念として定義されている）$(x_1^*, \cdots, x_m^*, y_1^*, \cdots, y_n^*, p^*)$ の存在が言えているとして，それが経済学的一般均衡であることを示そう．

抽象経済の均衡解 $(x_1^*, \cdots, x_m^*, y_1^*, \cdots, y_n^*, p^*)$ は拡張された意味での Nash 解の性質 (i), (ii) によって，

(1) 全ての player について，自らの選んだ戦略は，他の player 達の戦略を所与とした場合の制約条件付き Best Response になっている，

という性質を持っている．このとき，

(2) そのことから，経済学的一般均衡の定義である三つの条件，**(a)** 価格を所与とした，各消費主体の効用最大化，**(b)** 価格を所与とした，各生産主体の利潤最大化，**(c)** 超過需要 ≤ 0，を全て導き出せる，

ことが言えればよい．上の **(1)** は，各 i について x_i^* が $y_1^*, \cdots, y_n^*, p^*$ を所与としたときの best response であることを意味する．戦略制約が経済学的に言うところの予算制約に全く等しいことを考慮すれば，直ちに **(a)** が従う．さらに上の **(1)** は，各 j について y_j^* が p^* を所与としたときの best response であることを意味するから，**(b)** も直ちに従う．よって以下 **(c)** の成り立つことを示せば十分である．

全ての i について，x_i^* は戦略制約であるところの

$$p \cdot x_i^* \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$$

という式を満たすはずであるから，これを全ての i について足しあわせて

$$p^* \cdot z^* \leq 0$$

を得る．（ここで，z^* は $\sum_{i=1}^m x_i^* - \sum_{i=1}^m \omega_i - \sum_{j=1}^n y_j^*$ を表す．）一方で，p^* は $(x_1^*, \cdots, x_m^*, y_1^*, \cdots, y_n^*)$ に対する best response であるから，z^* を最大評価しているはずであり，

$$\forall\, p \in \Delta,\ p \cdot z^* \leq p^* \cdot z^* \leq 0$$

を得る．最後の式の p として $(1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, \cdots, 0, 1)$ を代入すれば，$z^* \leq 0$, すなわち **(c)** の成立することが言える．

6.4 補論２：寡占市場を含む一般均衡

REFERENCES

Anderson, R. (1978): “An elementary core equivalence theorem,” *Econometrica 46*(6), 1483–1487.

Debreu, G. (1952): “A social equilibrium existence theorem,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. 38*, 886–893. Reprinted as Chapter 2 in G. Debreu, *Mathematical Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Debreu, G. and Scarf, H. (1963): “A limit theorem on the core of an economy,” *International Economic Review 4*, 235–246. Reprinted in G. Debreu, *Mathematical Economics*, pp. 151-162. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Hildenbrand, W. (1974): *Core and Equilibria of a Large Economy.* Princeton University Press, Princeton.

Ichiishi, T. (1983): *Game Theory for Economic Analysis.* Academic Press, New York.

Kreps, D. M. (1990): *A Course in Microeconomic Theory.* Princeton University Press, New Jersey.

Shafer, W. and Sonnenschein, H. F. (1975): “Equilibrium in abstract economies without ordered preferences,” *Journal of Mathematical Economics 2*, 345–348.

Von Neumann, J. and Morgenstern, O. ((1944, 1947, 1953)): *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton.

【ゲーム理論の問題】

Exercise 6.1 （$\star$）Kreps の教科書にある Divide the cities および Divide the letters という二つのゲームについて，それらの違いを述べなさい．またこの二つのゲームを例に出すことによって Kreps は何を言いたかったのか，論じなさい．

(解答) 二つのゲームは共に数百個の Nash 解を持ち，一見したところ obvious way to play が存在しないように見える．それにもかかわらず，実際には比較的高い確率で，それぞれ異なる Nash 解が play される．それは前者においては都市名の分類，後者においては文字の分類，という作業が，それぞれ地理的配置，辞書的順序，という異なる focal principle と結び付くためである．

おそらく Kreps は，構造上は本質的な差異の無い二つのゲームにおいて，ゲームの形式的設定の中には現れない要因，例えば players の米国の地理に関する知識とか alphabet に関する常識とかいったもの，が focal point を，ひいては obvious way to play を左右する可能性について指摘したかったのであろう．

Exercise 6.2 Kreps の教科書 14 章本文および脚注 (c) を読み，本文中で示される Repeated Game の解がなぜ subgame perfect でないか，それをどのように変更すれば subgame perfect な解になるか，説明せよ．

(解答) 本文中の各 player の repeated game における戦略は次のようなものである．

> **本文中の player 1 の戦略：** player 1 は相手が過去に非協力的行動 $t2$ をとらない限り協力的行動 $s1$ をとる．ただし相手が一度でも非協力的行動 $t2$ をとったならば，その後は非協力的行動 $s2$ をとり続ける．
>
> **本文中の player 2 の戦略：** player 2 は相手が過去に非協力的行動 $s2$ をとらない限り協力的行動 $t1$ をとる．ただし相手が一度でも非協力的行動 $s2$ をとったならば，その後は非協力的行動 $t2$ をとり続ける．

これが Repeated Game における Nash 解であることは，本文に述べられた通りである．これらの戦略に従えば，一番最初は（過去に非協力的行動がとられてないのは明らかなので）協力的行動の組 ($s1$,$t1$) がとられ，以後両 player は手のすべらない限り協力的行動の組 ($s1$, $t1$) をとり続けることになる．ただしこの均衡は subgame perfect ではない．実際，player 2 の手がすべって ($s1$,$t2$) という行動の組が現れた，その次の node からはじまるこのゲームの subgame を考えてみよう．上の戦略に従えば，player 1 の戦略は非協力的行動 $s2$ をとり続けるというものになる．一方で player 2 は，（手がすべったのは自分であり，過去に player 1 の裏切りはないので）上の戦略を適用する限り，ともかく最初は $t1$ をとることになる．これは $s2$ をとり続けるという player 1 の subgame における戦略を所与とした場合の Best Response ではない．（player 2 にとっては，その node から先全て $t2$ をとり続けるという戦略の方が，より高い total 利得を実現する．）

脚注において修正された戦略は次のようなものである．

> **修正された player 1 の戦略：** player 1 は相手が過去に非協力的行動 $t2$ をとらない限り協力的行動 $s1$ をとる．ただし自分または相手が一度でも非協力的行動 $s2$ あるいは $t2$ をとったとすれば，その後は非協力的行動 $s2$ をとり続ける．
>
> **修正された player 2 の戦略：** player 2 は相手が過去に非協力的行動 $s2$ をとらない限り協力的行動 $t1$ をとる．ただし自分または相手が一度でも非協力的行動 $t2$ あるいは $s2$ をとったとすれば，その後は非協力的行動 $t2$ をとり続ける．

上記の修正された戦略においても，両 player は（手がすべらない限りは）協力的行動の組 ($s1$,$t1$) をとり続けることになり，ともに相手の戦略を所与とした場合に，自らの戦略を変更することで total の利得を増加させ得

ない（もちろん将来に対する割引率に多少の制約は必要となるが）ことは，本文で解説された先の場合と全く同様に示すことができる．また，一方が手をすべらせて非協力的行動をとってしまったあとの任意の subgame を考えた場合には，両者ともに非協力的行動 $s2$ または $t2$ をとり続けるという戦略になるので，互いが互いの戦略を所与としたときの Best Response になっている．互いに協力的行動がとり続けられている場合の任意の node から先の subgame はもとの game と何等変わらないから，そのような subgame で互いが互いの Best Response をとっていることは，もとの game で上記の戦略が Nash 解であることと全く同様の理由でもって保証される．よって上記の修正された戦略の組は subgame perfect な Nash 解となる．

Exercise 6.3 （$\star\star$）2 人 2 財の単純交換経済 $\mathcal{E} = \{(X_i, \precsim_i, \omega_i)_{i=1,2}\}$, $X_i = R^2_+$ における下図のような資源配分 $x^* = (x^*_1, x^*_2)$ について，その n 回レプリカ資源配分がその n 回レプリカ経済の Core に入らないような n に関する十分条件を，理由とともに一つ挙げなさい．